ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය

විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව

අවසාන පරීක්ෂණය - 2016/2017

ශුද්ධ ගණිතය - තුන්වන මට්ටම

PUU1142/PUE3142 – දෛශික අවකාශ

කාලය පැය දෙකයි.

දිනය : -29-12-2017 **වේලාව : -ප.ව.2.00 –ප.ව. 4.00 දක්වා**

ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1.

(a) V යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයකි. ප්‍රත්‍යක්ෂ භාවිතයෙන් පහතදෑ සාධනය කරන්න

(i) සියලුම $v \in V$ සඳහා $0 \cdot x = 0$

(ii) සියලුම $\alpha \in F$ සඳහා $\alpha \cdot 0 = 0$.

(iii) සියලුම $\alpha \in F$ සහ $x \in V$ සඳහා $(-\alpha).x = -(\alpha..x)$.

(b) $V = \{ (a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ යයි ගනිමු . සියලුම $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in V$ සහ $c \in \mathbb{C}$ සඳහා $(a_1,\ a_2) + (b_1,\ b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ සහ $c(a_1,\ a_2) = (ca_1, ca_2)$ ලෙස අර්ථ දක්වනු ලැබේ. මෙහි $\mathbb{C}$ යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ක්ෂේත්‍රය වේ. V යනු $\mathbb{C}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයක් ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(c) $V = \{ (a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ යයි ගනිමු . සියලුම $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in V$ සහ $c \in \mathbb{R}$ සඳහා $(a_1,\ a_2) + (b_1,\ b_2) = (2a_1 + b_1, a_2 + 3b_2)$ සහ $c(a_1,\ a_2) = (ca_1, ca_2)$ ලෙස අර්ථ දක්වනු ලැබේ. මෙහි $\mathbb{R}$ යනුතාත්වික සංඛ්‍යා ක්ෂේත්‍රය වේ.. V යනු $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයක් ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

2.

(a) W_1 සහ W_2 යනු V යන F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශ නම් $W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1 \ and \ w_2 \in W_2 \}$ යනු V යන F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශයක් බව සාධනය කරන්න.

(b) W_1 සහ W_2 යනු V යන F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශ යයි ගනිමු. $W_1 \cup W_2$ යනු V යන F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශයක් නම් $W_1 \subset W_2$ හෝ $W_2 \subset W_1$ බව සාධනය කරන්න.

(c) පහත දැක්වෙන කුලක අතරින් කවරක් සුපුරුදු එකතුව සහ අදිශ ගුණිතය යටතේ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ $\mathbb{R}^2$ දෛශික අවකාශ අවකාශයෙහි උප අවකාශ වේදැයි සොයන්න.

(i) $A = \{(a + 2b, a + 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

(ii) $B = \{(a, a^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$

3.

(a) U සහ V යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශ දෙකක් ලෙසද $T: U \to V$ එකජ පරිනාමණයක් යයි ද ගනිමු. T හි මදය U හි උප අවකාශයක් බව සාධනය කරන්න.

(b) $M = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$ ලෙස ගනිමු. සුපුරුදු න්‍යාස එකතුව සහ අදිශ ගුණිතය යටතේ M යනු $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයක් වේ.

$T: M \to M$ යනු $T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a + b & b \\ c & c + d \end{bmatrix}$ මඟින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ.

$U = \{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ලෙස සලකන්න.

(i) T ඒකජ පරිනාමණයක් බව පෙන්වන්න.

(ii) T හි මදය සොයන්න.

(iii) U යනු $\boldsymbol{T}$ යටතේ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයේ අචලක උප අවකාශයක් වේද යන්න තීරණය කරන්න. ඔබේ පිළිතුර සාධනය කරන්න.

4.

(a) U සහ V යන F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශ අතර සමරූපීතාව අර්ථ දක්වන්න.

(b) U සහ V යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශ දෙකක් ලෙසද $T: U \to V$ යනු V මතට වූ ඒකජ පරිනාමණයක් යයි ද ගනිමු. $ker\, T = \{0\}$ නම් හා නම්ම පමණක් T යනු සමරූපීතාවක් වේ බව සාධනය කරන්න. 0 is the additive identity of U

(c) V යන F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයෙහි පදනම අර්ථ දක්වන්න.

(d) U සහ V යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශ දෙකක් ලෙසද $T: U \to V$ ඒකජ සමරූපීතාවක් යයි ද ගනිමු. $S = \{u_1, u_2, \ldots u_n\}$ යනු U හි පදනමක් නම්

$T(S) = \{T(u_i) \mid u_i \in S\}$ යනු V හි පදනමක් බව සාධනය කරන්න.

5.

(a) දෛශික අවකාශයක S යන උප කුලකයෙහි ඒකජ ස්වායත්තාව සහ පරායත්තාව අර්ථ දක්වන්න.

(b) $S = \{P_1 = 1 - x, P_2 = 5 + 3x - 2x^2, P_3 = 1 + 3x - x^2\}$ යනු $\mathbb{R}$ මත වූ උපරිම මාත්‍රය දෙකවූ සියලුම බහුපද දෛශික අවකාශයෙහි උප කුලකයකි.. S කුලකය ඒකජ ස්වායත්තද? ඔබේ පිළිතුර සනාත කරන්න.

(c) U යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ V දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශයකි. $T : U \rightarrow V$ ඒකජ පරිනාමණයක් යයි ගනිමු. $T(U) = \{T(u) | u \in U\}$ යනු V හි උප අවකාශයක් බව සාධනය කරන්න.

(d) U යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ V දෛශිකයෙහි උප අවකාශයකි. $T : U \rightarrow V$ එකජ පරිනාමණයක් සහ $S = \{u_1, u_2, \dots u_n\}$ යනු U හි එකජ ස්වායත්ත උප කුලකයකි.
$T(S) = \{T(u_i) | u_i \in S\}$ කුලකය සැමවිටම එකජ ස්වායත්තද? ඔබේ පිළිතුර සනාත කරන්න.

6.

(a) P_n යනු උපරිම මාත්‍රය n වූ බහුපද වලින් සැදුනු $\mathbb{R}$ මත වූ දෛශික අවකාශය වේ.
ඕනෑම $p, q \in P_n$ සඳහා

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

ලෙස අර්ථ දක්වනු ලැබේ.

(i) P_n යනු යුක්ලීඩීය අවකාශයක් බව පෙන්වන්න. .

(ii) P_2 තුල $2x$ සහ $1 - 2x^2$ බහුපද වල දිග සොයන්න.

(iii) P_2 $2x$ සහ $1 - 2x^2$ බහුපද අතර පරතරය සොයන්න.

(b) $u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (1, -1, 2)$ සහ $u_3 = (1, 0, 1)$ යන දෛශික සුපුරුදු යුක්ලීඩීය දෛශික අවකාශයෙහි පදනමක් බව පෙන්වන්න. the Gram–Schmidt ප්‍රාහිලම්භ ක්‍රියාවලිය මගින් $\{u_1, u_2, u_3\}$, E^3 හි ප්‍රාහිලම්භ පදනමක් බවට පරිනාමණය කරන්න.