

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்

விஞ்ஞான இளமாணி/கல்வியியல் இளமாணி பட்டப்படிப்பு, தொடர் கற்கைநெறி

இறுதிப் பரீட்சை - 2016/2017

மட்டம் - 03 தூய கணிதம்

PUU1142/PUE3142- காவிய வெளிகள்



காலம் :- இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

திகதி: - 29-12-2017

நேரம்: - பி.ப 2.00 - பி.ப 4.00

நான்கு வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடையளிக்குக.

1. (a) V ஆனது புலம் F இல் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு காவிய வெளி என்க. காவிய வெளியின் வெளிப்படை உண்மையினைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) அனைத்து $x \in V$ இற்கு $0 \cdot x = 0$ ஆகும்,

(ii) அனைத்து $\alpha \in F$ இற்கு $\alpha \cdot 0 = 0$ ஆகும்,

(iii) அனைத்து $\alpha \in F$ மற்றும் $x \in V$ இற்கு $(-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x)$ ஆகும்.

(b) $V = \{ (a_1, a_2) / a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$ என்க. அனைத்து $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in V$ இற்கும் பின்வரும் செய்கைகள் வரையறுக்கப்படுகின்றன, $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ மற்றும் $c \in \mathbb{C}$ இற்கு $c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2)$, இங்கு \mathbb{C} சிக்கல் எண்களின் புலமாகும்.

மேற்குறித்த செய்கைகளின் கீழ், V ஆனது சிக்கல் எண்களின் புலத்தில் வரையறுக்கப்படும் காவிய வெளியொன்றா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(c) $V = \{ (a_1, a_2) / a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$ என்க. அனைத்து $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in V$ இற்கும் பின்வரும் செய்கைகள் வரையறுக்கப்படுகின்றன, $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (2a_1 + b_1, a_2 + 3b_2)$ மற்றும் $c \in \mathbb{R}$ இற்கு $c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2)$, இங்கு \mathbb{R} மெய் எண்களின் புலமாகும்.

மேற்குறித்த செய்கைகளின் கீழ், V ஆனது மெய் எண்களின் புலத்தில் வரையறுக்கப்படும் காவிய வெளியொன்றா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

2. (a) W_1, W_2 என்பன ஒரு புலம் F இல் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு காவிய வெளி V இனது உப

வெளிகள் ஆக இருக்குமாயின் $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1 \text{ மற்றும் } w_2 \in W_2\}$ உம் காவிய வெளி V இனது ஒரு உப வெளி என நிறுவுக.

(b) W_1 மற்றும் W_2 என்பன ஒரு புலம் F இல் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு காவிய வெளி V இனது உப வெளிகள் என்க. $W_1 \cup W_2$ ஆனது புலம் F இல் வரையறுக்கப்பட்ட காவிய வெளி V இனது ஒரு உப வெளியாக இருக்குமாயின் $W_1 \subset W_2$ அல்லது $W_2 \subset W_1$ ஆக இருக்கும் என நிறுவுக.

(c) பின்வரும் ஒவ்வொரு தொடைகளும் வழமைபான கூட்டல் மற்றும் எண்ணிப்

பெருக்கத்திற்கமைய புலம் \mathbb{R} இல் வரையறுக்கப்பட்ட காலி வெளி \mathbb{R}^2 இனது உப வெளிகள் ஆகுமா என்பதை துணிக:

- (i) $A = \{(a + 2b, a + 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
(ii) $B = \{(a, a^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$

3. (a) U மற்றும் V என்பன புலம் F இல் வரையறுக்கப்பட்ட காலி வெளிகள் மற்றும் $T:U \rightarrow V$ என்பது ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றம் என்க. T இன் வகுதியானது U இன் ஒரு உபவெளி என நிறுவுக.

(b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ என்க. M ஆனது வழமைபான தாயக் கூட்டல் மற்றும்

எண்ணிப் பெருக்கத்திற்கமைய புலம் \mathbb{R} இல் வரையறுக்கப்பட்ட காலி வெளி என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. ஏகபரிமாண உருமாற்றம் $T:M \rightarrow M$ ஆனது

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$
 ஆகுமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ என உத்தேசிக்க.

- (i) T ஆனது ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றம் எனக் காட்டுக.
(ii) T இன் வகுதியை காண்க.
(iii) U ஆனது புலம் \mathbb{R} இல் T இன் கீழ் காலி வெளி M இன் ஒரு மாற்றில் உபவெளி ஆகுமா? உமது விடையை நிறுவுக.

4. (a) ஒரு புலம் F இல் வரையறுக்கப்பட்ட காலி வெளிகள் U மற்றும் V என்பவற்றிற்கிடையிலான சமவருவாக்கம் ஒன்றை வரையறுக்குக.

(b) U மற்றும் V என்பன புலமொன்றில் வரையறுக்கப்பட்ட காலி வெளிகள் என்க. $T:U \rightarrow V$ ஆனது V இன் மீது ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றம் என்க. T ஆனது ஒரு சமவருவாக்கம் என்றால் என்றால் மட்டும் $\ker T = \{0\}$ என நிறுவுக, இங்கு 0 ஆனது U இலுள்ள கூட்டற்றகவுச் சர்வசமன்பாடு ஆகும்.

(c) புலம் F ஒன்றில் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு காலி வெளி V இன் அடிமூலம் ஒன்றை வரையறுக்குக.

(d) U மற்றும் V என்பன புலம் F இல் வரையறுக்கப்பட்ட காலி வெளிகள், $T:U \rightarrow V$ ஒரு சமவருவாக்கம் மற்றும் $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ஆனது U இலுள்ள ஒரு அடிமூலம் என்க. $T(S) = \{T(u_i) \mid u_i \in S\}$ ஆனது V இலுள்ள ஒரு அடிமூலம் என நிறுவுக.

5. (a) காலி வெளி ஒன்றிலுள்ள சூனியமற்ற முடிவுள்ள ஏகபரிமாணமுறையாய்ச் சாராத மற்றும் ஏகபரிமாணமுறையாய்ச் சார்ந்த உபதொடை S ஐ வரையறுக்குக.

- (b) $S = \{P_1 = 1 - x, P_2 = 5 + 3x - 2x^2, P_3 = 1 + 3x - x^2\}$ என்பது பல்லுறுப்பியின் படி ஆகக்கூடுதலாக இரண்டையுடைய புலம் \mathbb{R} இல் வரையறுக்கப்பட்ட காவி வெளியின் ஒரு உபதொடை என்க. புலம் \mathbb{R} இல் S ஆனது ஏகபரிமாண முறையாய்ச் சாராத தொடையாகுமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.
- (c) U ஆனது புலம் F இல் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு காவி வெளி V இனது ஒரு உப வெளி மற்றும் $T:U \rightarrow V$ ஆனது ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றம் என்க. $T(U) = \{T(u) | u \in U\}$ ஆனது V இனது ஒரு உப வெளி என நிறுவுக.
- (d) U ஆனது புலம் F இல் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு காவி வெளி V இனது ஒரு உப வெளி, $T:U \rightarrow V$ ஆனது ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றம் மற்றும் $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ஆனது U இலுள்ள ஏகபரிமாண முறையாய்ச் சாராத தொடை என்க. தொடை $T(S) = \{T(u_i) | u_i \in S\}$ ஆனது எப்போதும் ஏகபரிமாண முறையாய்ச் சாராததா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

6. (a) P_n ஆனது புலம் \mathbb{R} இல் வரையறுக்கப்பட்ட n ஐ விட குறைவான படியை கொண்ட பல்லுறுப்பிகளிலான காவி வெளி என்க. இவ்வெளியில், எதேச்சையான பல்லுறுப்பிகள் p மற்றும் q என்பன இவ்வாறு

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx \quad \text{என வரையறுக்கப்படுகின்றது.}$$

- (i) P_n ஒரு ஊக்கிளிட்டு வெளி எனக் காட்டுக.
- (ii) P_2 இல் உள்ள பல்லுறுப்பிகள் $2x$ மற்றும் $1-2x^2$ என்பவற்றின் நீளங்களைக் காண்க.
- (iii) P_2 இல் உள்ள பல்லுறுப்பிகள் $2x$ மற்றும் $1-2x^2$ என்பவற்றிற்கிடையிலான தூரத்தை காண்க.
- (b) $u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (1, -1, 2)$ மற்றும் $u_3 = (1, 0, 1)$ என்னும் மூன்று காவிகளும் வழைமையான ஊக்கிளிட்டு மூவெளி E^3 இல் அடி மூலம் ஒன்றை உருவாக்கும் எனக் காட்டுக. கிராம்-சிமித் செய்முறையைப் பயன்படுத்தி $\{u_1, u_2, u_3\}$ என்பவற்றிலிருந்து E^3 இற்கான நிமிர்செவ்வளவு மூலமொன்றை உருவாக்குக.