ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය - 2020/2021
ශුද්ධ ගණිතය - තුන්වන මට්ටම
PEU3202– දෛශික අවකාශ

කාලය පැය දෙකයි.

දිනය : - 30-03-2022 **වේලාව: ප.ව. 1.30 සිට ප.ව. 3.30**

ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1.

(a) V යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයකි. සියලුම $\alpha \in F$ සහ සියලුම $x \in V - \{0\}$ සඳහා

(a) $\alpha \cdot x = 0$ නම් $\alpha = 0$ බව සාධනය කරන්න

(b) $\alpha \cdot x = \beta \cdot x$ නම් $\alpha = \beta$ බව සාධනය කරන්න

(b) $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ ලෙස ගනිමු. සියලුම $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M$ සහ $\alpha \in \mathbb{R}$ සඳහා, $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$ සහ

$\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 3\alpha d_1 \end{bmatrix}$ මගින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ. $\mathbb{R}$ යනු තාත්වික සංඛ්‍යා ක්ෂේත්‍රය වේ.

ඉහත අර්ථ දැක්වීම් යටතේ M යනු තාත්වික සංඛ්‍යා ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයක් ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(c) $u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (1, -1, 2)$ සහ $u_3 = (1, 0, 1)$ යන දෛශික $\mathbb{R}^3$ දෛශික අවකාශයෙහි පදනමක් බව පෙන්වන්න.

2.

(a) V යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයකි. $W \subseteq V$ සහ $W \neq \phi$ වේ. W යනු V යන F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශයක් නම් හා නම්ම පමණක් සියලුම $\alpha, \beta \in F$ සහ $x, y \in W$ සඳහා, $\alpha x + \beta y \in W$ බව සාධනය කරන්න.

ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය - 2020/2021
ශුද්ධ ගණිතය - තුන්වන මට්ටම
PEU3202-- දෛශික අවකාශ

කාලය පැය දෙකයි.

දිනය : - 30-03- 2022 **වේලාව: ප.ව. 1.30 සිට ප.ව. 3.30**

ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1.

(a) V යනු $\boldsymbol{F}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයකි. සියලුම $\alpha \in F$ සහ සියලුම $x \in V-\{0\}$ සඳහා

(a) $\alpha \cdot x = 0$ නම් $\alpha = 0$ බව සාධනය කරන්න

(b) $\alpha \cdot x = \beta \cdot x$ නම් $\alpha = \beta$ බව සාධනය කරන්න

(b) $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ ලෙස ගනිමු. සියලුම $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M$ සහ $\alpha \in \mathbb{R}$ සඳහා, $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$ සහ

$\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 3\alpha d_1 \end{bmatrix}$ මඟින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ. $\mathbb{R}$ යනු තාත්වික සංඛ්‍යා ක්ෂේත්‍රය වේ.

ඉහත අර්ථ දැක්වීම් යටතේ M යනු තාත්වික සංඛ්‍යා ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයක් ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(c) $u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (1, -1, 2)$ සහ $u_3 = (1, 0, 1)$ යන දෛශික $\mathbb{R}^3$ දෛශික අවකාශයෙහි පදනමක් බව පෙන්වන්න.

2.

(a) V යනු $\boldsymbol{F}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයකි. $W \subseteq V$ සහ $W \neq \phi$ වේ. W යනු V යන $\boldsymbol{F}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශයක් නම් හා නම්ම පමනක් සියලුම $\alpha, \beta \in F$ සහ $x, y \in W$ සඳහා, $\alpha x + \beta y \in W$ බව සාධනය කරන්න.

(b) පහත දැක්වෙන කුලක සුපුරුදු එකතුව සහ අදිශ ගුණිතය යටතේ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ $\mathbb{R}^3$ දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශ වේදැයි සොයන්න. ඔබේ පිළිතුරු සනාත කරන්න.

(i) $A = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \; and \; b = 2a + a^2\}$ සහ

(ii) $B = \{(a, b, c) \mid a, b \in \mathbb{R} \; and \; a + b = c\}$

(c) W_1 සහ W_2 යනු V යන $\boldsymbol{F}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශ නම් $W_1 \cap W_2$ යනු $\boldsymbol{V}$ යන $\boldsymbol{F}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශයක් බව සාධනය කරන්න.

3.

(a) $\boldsymbol{V}$ යනු $\boldsymbol{F}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයකි. $\beta \in V$ යනු $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n \in V$, දෛශික වල ඒකජ සංයෝගයක් නම් $\{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n\}$ කුලකය ඒකජව පරායත්ත බව පෙන්වන්න.

(b) α, β සහ γ යනු V යන $\boldsymbol{F}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයෙහි ඒකජව ස්වායත්ත දෛශික නම්

$\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ ඒකජව ස්වායත්ත දෛශික බව සාධනය කරන්න..

(c) V යනු $\boldsymbol{F}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ පරිමිත මාන දෛශික අවකාශයකි. W යනු V හි උප අවකාශයක් වේ. $W = \dim V$ නම් හා නම්ම පමණක් $W = V$ බව සාධනය කරන්න.

4.

(a) $T : V \to W$ යනු ඒකජ පරිනාමණයකි.

(i) $T(0) = 0$ බව පෙන්වන්න

(ii) T හි මදය $= \{0\}$ නම් හා නම්ම පමණක් T එකට එක බව පෙන්වන්න.

(b) $V = \mathbb{R}^2$ සහ $W = \mathbb{R}^3$ ලෙස ගනිමු. V සහ W සුපුරුදු එකතුව සහ අදිශ ගුණිතය යටතේ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශවේ.

$T : V \to W$ යනු $T(x, y) = (2x, x + y, x + 2y)$ මඟින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ.

(i) T ඒකජ පරිනාමණයක් බව පෙන්වන්න.

(ii) T හි මදය සොයන්න.

(iii) T යනු සමරූපිතාවයක්ද? ඔබේ පිළිතුර සනාත කරන්න.

5.

(a) $M = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \}$ ලෙස ගනිමු.. M සුපුරුදු න්‍යාස එකතුව සහ අදිශ ගුණිතය යටතේ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයක් වේ.

$T : M \to M$ යනු $T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a+b & b \\ 3c & d \end{bmatrix}$ මගින් අර්ථ දක්වන ඒකජ පරිනාමණය වේ.

පහත දැක්වෙන කුලක අතරින් කවරක් T යටතේ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ M දෛශික අවකාශයේ අචිචලක උප අවකාශයක් වේද යන්න සොයන්න.

(i) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a.b \in \mathbb{R} \right\}$

(ii) $W = \{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a,,c \in \mathbb{R} \}$

(b)

(i) අන්තර් ගුණිත අවකාශය අර්ථ දක්වන්න .

(ii) V යනු $\boldsymbol{F}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ අන්තර් ගුණිත අවකාශයකි $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathrm{V}$ සඳහා, $< x_1 + x_2, y_1 + y_2 > = < x_1, y_1 > + < x_1, y_2 > + < x_2, y_1 > + < x_2, y_2 >$ බව සාධනය කරන්න.

(iii) $u = (x_1, x_2, x_3),\ v = (y_1, y_2, y_3)$ ලෙස ගනිමු. $u, v \in \mathbb{R}^3$.
$< u, v > = {x_1}^2 - {x_2}^2 - x_1 x_3$. Is $< u, v >$) යනු $\mathbb{R}^3$ මත වූ අන්තර් ගුණිත අවකාශයක්ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

6.

(a) $\underline{u}$ සහ $\underline{v}$ යනු යුක්ලීඩීය දෛශික අවකාශයෙහි අවකාශයෙහි දෛශික දෙකකි.

(i) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ බව සාධනය කරන්න.

(ii) $\underline{u}$ සහ $\underline{v}$ අතර කෝණය නිර්වචනය කරන්න.

(iii) E^3 යනු සුපුරුදු යුක්ලීඩීය දෛශික අවකාශය වේ.
$u = (1, -1, 2)$ and $v = (2, 1, 0)$ ලෙස ගනිමු. $\underline{u}$ සහ $\underline{v}$ අතර කෝණය සොයන්න.

(b) $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ සහ $u_3 = (0, 0, 1)$ යන දෛශික E^3 සුපුරුදු යුක්ලීඩීය දෛශික අවකාශයෙහි පදනමක් බව පෙන්වන්න. Gram–Schmidt ක්‍රියාවලිය මගින් $\{u_1, u_2, u_3\}$, E^3 හි ප්‍රලම්භ පදනමක් බවට පරිනාමණය කරන්න.