066

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்

விஞ்ஞான இளமாணி/ கல்வி இளமாணி பட்டப்படிப்பு, தொடர் கல்வி கற்கைநெறி

இறுதிப் பரீட்சை 2020/2021

மட்டம் 03 தூய கணிதம்

PEU3202 காவி வெளிகள்

காலம்: - இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

திகதி: - **30-03-2022** நேரம்: பி.ப. **1.30** இலிருந்து பி.ப. **3.30** வரை.

நான்கு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்கவும்.

1.

(a) F என்னும் ஒரு புலத்தின் மேல் V ஆனது ஒரு காவிவெளி எனக் கொள்க. எல்லா $\alpha \in F$ மற்றும் எல்லா $x \in V - \{0\}$ களிற்கும்,

(a) $\alpha \cdot x = 0$ எனின் $\alpha = 0$ ஆகும்

(b) $\alpha \cdot x = \beta \cdot x$ எனின் $\alpha = \beta$ ஆகும் என நிறுவுக.

(b) $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ என்க. அனைத்து $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M$ இற்கும், $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$ மற்றும் $\alpha \in \mathbb{R}$ இற்கு $\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 3\alpha d_1 \end{bmatrix}$ என வரையறுக்கப்படுகின்றன, இங்கு $\mathbb{R}$ ஒரு மெய் எண் புலம் ஆகும். இந்த செய்கைகளின் கீழ் மெய் எண்களினுடைய புலத்தின் மேல் M ஒரு காவி வெளியா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(c) மூன்று காவிகள் $u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (1, -1, 2)$ மற்றும் $u_3 = (1, 0, 1)$ என்பன $\mathbb{R}^3$ இற்கான ஒரு அடிமூலத்தை உருவாக்கும் எனக் காட்டுக.

2.

(a) F என்னும் ஒரு புலத்தின் மேல் V ஒரு காவி வெளி மற்றும் $W \subseteq V, W \neq \phi$ என்க. F இன் மேல் W என்பது ஒரு காவி வெளி V இன் ஒரு உபவெளி என்றால் என்றால் மட்டும் எல்லா $\alpha, \beta \in F$ மற்றும் $x, y \in W$ இற்கு $\alpha x + \beta y \in W$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

(b) பின்வரும் தொடைகள் வழமையான கூட்டல் மற்றும் எண்ணிப் பெருக்கத்தின் கீழ் புலம் $\mathbb{R}$ இன் மேல் காவி வெளி $\mathbb{R}^3$ இன் உபவெளிகளா எனத் துணிக. ஒவ்வொறு வகையிலும் உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(i) $A = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}$ மற்றும் $b = 2a + a^2\}$

(ii) $B = \{(a,b,c) \mid a,b \in \mathbb{R}$ மற்றும் $a + b = c\}$

(c) F என்னும் ஒரு புலத்தின் மேல் W_1 மற்றும் W_2 என்பன ஒரு காவிவெளி V இன் உபவெளிகள் எனக் கொள்க. புலம் F இன் மேல் காவி வெளி V இல் $W_1 \cap W_2$ ஒரு உபவெளி என நிறுவுக.

3.

(a) F என்னும் புலத்தின் மேல் V ஆனது ஒரு காவிவெளி எனக் கொள்க. $\beta \in V$ ஆனது $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n \in V$ என்னும் காவிகளின் தொடையின் ஒரு ஏகபரிமாண சேர்மானம் எனின், $\{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n\}$ ஆனது ஏகபரிமாண முறையாய்ச்சார்ந்தது எனக்காட்டுக.

(b) F என்னும் புலமொன்றின் மேல் α, β மற்றும் γ என்பன V இல் ஏகபரிமாணமுறையாய்ச் சாராத காவிகள் எனின், $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ என்பனவும் ஏகபரிமாணமுறையாய்ச் சாராதவை என நிறுவுக.

(c) W ஆனது F என்னும் புலத்தின் மேல் ஒரு முடிவுள்ள பரிமாணத்தைக் கொண்ட காவிவெளி V இன் ஒரு உபவெளி எனக் கொள்க, $\dim W = \dim V$ என்றால் என்றால் மட்டும் $W = V$ ஆகும் என நிறுவுக.

4.

(a) $T: V \to W$ ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றம் என்க.

(i) $T(0) = 0$

(ii) $ker\, T = \{0\}$ என்றால் என்றால் மட்டும் T ஒன்றுக்கொன்று

எனக் காட்டுக.

(b) $V = \mathbb{R}^2$ மற்றும் $W = \mathbb{R}^3$ என்க. வழமையான கூட்டல் மற்றும் எண்ணி பெருக்கத்துக்கு அமைவாக புலம் $\mathbb{R}$ இன் மேல் V மற்றும் W என்பன காவி வெளிகள் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

$T: V \to W$ என்னும் படமாக்கமானது $T(x,y) = (2x, x + y, x + 2y)$ இனால் வரையறுக்கப்படுகிறது என்பதை கருதுக.

(i) T என்பது ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றம் எனக் காட்டுக.

(ii) T இன் அகணியைக் காண்க.

(iii) T ஒரு சமவுருவாக்கமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

5.

(a) $M = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$ என்க. வழமையான தாயக் கூட்டல் மற்றும் எண்ணி பெருக்கத்துக்கு அமைவாக புலம் $\mathbb{R}$ இன் மேல் M ஒரு காவி வெளி என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

$\boldsymbol{T : M \to M}$ என்னும் படமாக்கமானது $T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a+b & b \\ 3c & d \end{bmatrix}$ இனால் வரையறுக்கப்படுகிறது என்க. T ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றம் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

பின்வரும் தொடைகள் புலம் $\mathbb{R}$ இன் மேல் T இன் கீழ் காவிவெளி M இல் மாற்றமில் உபவெளிகளா எனத் துணிக.

(i) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a.b \in \mathbb{R} \right\}$

(ii) $W = \{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} | a,, c \in \mathbb{R} \}$

(b)

(i) உட்பெருக்க வெளி ஒன்றை வரையறுக்குக.

(ii) F என்னும் ஒரு புலத்தின் மேல் V ஒரு உட்பெருக்க வெளி என்க. $x_1, x_2, y_1, y_2 \in$ V இற்கு $< x_1 + x_2, y_1 + y_2 > = < x_1, y_1 > + < x_1, y_2 > + < x_2, y_1 > + < x_2, y_2 >$ என நிறுவுக.

(iii) $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ என்க இங்கு $u, v \in \mathbb{R}^3$ ஆகும்.
$< u, v > = {x_1}^2 - {x_2}^2 - x_1 x_3$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $< u, v >$ என்பது $\mathbb{R}^3$ இன் ஒரு உட்பெருக்கமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

6.

(a) $\boldsymbol{u}$ மற்றும் $\boldsymbol{v}$ என்பன ஊக்கிட்டு வெளியொன்றிலுள்ள யாதாயினும் இரண்டு காவிகள் என்க.

(i) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ என நிறுவுக.

(ii) $\boldsymbol{u}$ மற்றும் $\boldsymbol{v}$ என்பவற்றிக்கு இடையிலான கோணத்தை வரையறுக்க.

(iii) E^3 என்பது வழமையான ஊக்கிட்டு மூவெளி மற்றும் $u, v \in E^3$ எனக் கொள்க.
$u = (1, -1, 2)$ மற்றும் $v = (2,1,0)$ என்க. $\boldsymbol{u}$ மற்றும் $\boldsymbol{v}$ என்பவற்றிக்கு இடையிலான கோணத்தைக் காண்க.

(b) மூன்று காவிகள் $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ மற்றும் $u_3 = (0, 0, 1)$ என்பன வழமையான ஊக்களிட்டு மூவெளி E^3 இற்கான ஒரு அடிமூலத்தை உருவாக்கும் எனக் காட்டுக. கிராம்சிமிற்றர் செயற்பாட்டை பயன்படுத்தி $\{u_1, u_2, u_3\}$ இலிருந்து E^3 இற்கான நிமிர்கோண மூலம் ஒன்றை அமைக்க.