

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
இயற்கை விஞ்ஞானங்கள் பீடம்
விஞ்ஞானமாணி / கல்விமாணி பட்டப்பாட நெறி



தினைக்களம்	: கணிதம்
மட்டம்	: மட்டம் 03
பர்ட்சையின் பெயர்	: இறுதிப் பர்ட்சை
கற்கையின் குறியீடு மற்றும் தலைப்பு	: PUU1141/PUE3141/ PEU3301 கணிதத்தின் அடிப்படைகள்
கல்வியாண்டு	: 2020 / 2021
திகதி	: 15.03.2022
நேரம்	: முடி. 09.30 - முப. 11.30

பொது அறிவுறுத்தல்கள்

1. வினாக்களுக்கு விடையளிக்கமுன் அனைத்து அறிவுறுத்தல்களையும் கவனமாக வாசிக்கவும்.
2. இவ்வினாத்தாள் இரண்டு (02) பக்கங்களில் ஆறு (06) வினாக்களைக் கொண்டுள்ளது.
3. மாதாயினும் நான்கு (04) வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்கவும். அனைத்து வினாக்களும் சமமான புள்ளிகளைக் கொண்டுள்ளன.
4. ஒவ்வொரு வினாக்களுக்குமான விடைகள் ஒரு புதிய பக்கத்தில் ஆரம்பிக்கப்பட வேண்டும்.
5. வினாக்களுக்கு "விடையளிக்க நீல அல்லது கருப்பு வண்ண மை பயன்படுத்தவும்.
6. உங்களுடைய விடைத்தாளின் முன் அட்டையில் நீங்கள் விடையளித்த வினாக்களின் இலக்கத்தை வட்டப்பிடுக.
7. உங்களுடைய சுட்டெண்ணை உங்களுடைய விடைத்தாளில் தெளிவாக குறிப்பிடவும்.

Q1

(a) சமனிலி $\frac{|x-1|}{|3x+1|} > 1$ ஜத் தீர்க்க, இங்கு $x \in \mathbb{R}$ ஆகும்.

(b) $f: X \rightarrow Y$ ஒரு சார்பாக இருக்கின்றது மற்றும் A, B என்பன Y இன் உப தொடைகள் என்க. சமன் குறியீட்டின் ஓவ்வொரு பக்கமும் உள்ள தொடை மற்றையதன் உப தொடை என காட்டுவதன் மூலம் சர்வசமன் $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ என நிறுவுக.

(c) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ஆனது $f(n) = n^2$ இனால் வரையறுக்கப்படுகிறது என்க.

$A = \{0, 1, 2, 3\}$ மற்றும் $B = \{-2, -1, 0, 1\}$ எனின்
 $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ எனக் காட்டுக.

Q2

(a) aRb என்றால் என்றால் மட்டும் $3a + b$ என்பது 4 இன் மடங்கு என்பதன் மூலம் \mathbb{Z} இன் மீது R இன் தொடர்பானது வரையறுக்கப்படுகிறது என்க.

- (i) R என்பது \mathbb{Z} இலுள்ள ஒரு சமவன்மைத் தொடர்பு என நிறுவுக.
- (ii) 0 இன் சமவன்மை வகுப்பைக் காண்க.
- (iii) 2 இன் சமவன்மை வகுப்பைக் காண்க.

(b) $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ என்க. $ax + by = \gcd(a, b)$ என ஆகுமாறு $x, y \in \mathbb{Z}$ உண்டு என நிறுவுக, இங்கு $\gcd(a, b)$ என்பது a மற்றும் b இன் பொது வகுத்திகளுள் பெரியதைக் (greatest common divisor) குறிக்கிறது.

Q3

(a) $a < b$ என ஆகுமாறு $a, b \in \mathbb{R}$ களுக்கு $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right) = [a, b]$ என நிறுவுக.

(b) $\sqrt{6}$ ஒரு விகிதமுறைத் தொடர்பாட்டை (irrational number) என நிறுவுக.

Q4

(a) A_1, A_2, \dots, A_n மற்றும் B ஆகியன தொடைகள் என்க. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டை (Principle of Mathematical Induction) பயன்படுத்தி, ஓவ்வொறு $n \in \mathbb{N}$ இற்கும்,

$(A_1 - B) \cap (A_2 - B) \cap \dots \cap (A_n - B) = (A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) - B$ என நிறுவுக.

- (b) சார்பு $f: (a, b) \rightarrow (c, d)$ ஆனது $f(x) = \left(\frac{d-c}{b-a}\right)(x-a) + c$ இனால் வரையறுக்கப்படுகிறது என்க. f ஒரு இருவழிக் கோப்பு (bijection) எனக் காட்டுக.

Q5

- (a) $n \in \mathbb{N}$ இற்கு $a_n = \frac{3}{n^2+3n+2}$ என்க.
- (i) $a_n = \frac{A}{(n+1)} + \frac{B}{(n+2)}$ என ஆகுமாறு A மற்றும் B இனைக் காண்க.
 - (ii) மேலுள்ள பெறுபேற்றைப் பயன்படுத்தி, ஒவ்வொறு $n \in \mathbb{N}$ இற்கும் n ஆவது பகுதிக் கூட்டுத்தொகை $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{3}{k^2+3k+2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{n+2}$ எனக் காட்டுக.
 - (iii) தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஒருங்கும் எனக் காட்டுக. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஜக் காண்க.
- (b) தொடரி ஒன்றின் எல்லைக்கான வரைவிலக்கணத்தைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம், $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+5}{7n+8} = \frac{2}{7}$ என நிறுவுக:

Q6

- (a) f, g மற்றும் h ஆகிய சார்புகள்
- $$f(x) = \frac{1}{x+1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}, x \in [1, +\infty)$$
- மற்றும்
- $$h(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$$
- இனால் தரப்படுகின்றன என்க.
- $f \circ g \circ h$ மற்றும் அதன் ஆட்சி என்பவற்றைக் காண்க.
- (b) $S = \left\{ \frac{2n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ என்க.
- (i) தொடை S வரைப்புற்று (bounded) என நிறுவுக.
 - (ii) $\sup S$ மற்றும் $\inf S$ இரண்டும் உண்டு என ஊத்தறிக.
 - (iii) $\sup S$ மற்றும் $\inf S$ என்பவற்றைக் காண்க. உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

=====//=====