077

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்

கணிதத் திணைக்களம்

விஞ்ஞானத்தில் உயர்சான்றிதழ்

**MYF 2521/MHF 2521 – இணைந்த கணிதம் 3**

மட்டம் 2 இறுதிப் பரீட்சை 2021/22

---

திகதி:- 17-09-2022 நேரம்:- மு.ப 09.30 இலிருந்து பி.ப 12.30 வரை

---

பகுதி **A** இல் **அனைத்து** வினாக்களுக்கும் மற்றும் பகுதி **B** இல் **ஐந்து** வினாக்களுக்கும் விடையளிக்குக.

## பகுதிA

1. கணித தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி,
அனைத்து $n \in \mathbb{N}$ இற்கும், $\sum_{r=1}^{n}(2r+1) = n(n+2)$ என நிறுவுக.

2. $\frac{1}{2}|x-1| > |x-4|$ இற்கு $x$ இன் மெய் பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க.

3. 1, 2, 3, 4 மற்றும் 5 என்னும் இலக்கங்களில் இருந்து ஒவ்வொரு இலக்கத்தையும் ஒரு தடைவ மாத்திரம் பயன்படுத்தி, ஐந்து இலக்கங்களைக் கொண்ட எத்தனை வேறுபட்ட எண்களை உருவாக்கமுடியும்.
அவற்றில் எத்தனை எண்கள்,
   (i) இரட்டை எண்கள்?
   (ii) 3 மற்றும் 4 இலக்கங்களை அடுத்தடுத்து கொண்டுள்ளன?

4. நேர் முழுவெண் சுட்டியிற்கு ஈருறுப்பு விரிவை பயன்படுத்தி, $\left(1+\sqrt{3}\right)^6 + \left(1-\sqrt{3}\right)^6 = 416$ எனக் காட்டுக.
இதிலிருந்து $\left(1+\sqrt{3}\right)^6$ இன் முழுவெண் பகுதியைக் காண்க.

5. சிக்கலெண்கள் $z$ வகைக்குறிக்கும் புள்ளிகளின் இடம் திருப்தியளிக்கும்
   (i) $|z-i| = 1$
   (ii) $Arg(z-i) = \frac{\pi}{6}$,
என்பவற்றை ஒரே ஆகன் வரிப்படத்தில் வரைக.
$r(cos\theta + isin\theta)$ என்ற வடிவத்தில் இந்த இடங்களின் இடைவெட்டும் புள்ளியால் வகைகுறிக்கும் சிக்கலெண்களைக் காண்க. இங்கு $r > 0$ மற்றும் $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ஆகும்.

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ எனின் $A^2 - 3A = -I$ எனக் காட்டுக. **இதிலிருந்து** $A^{-1}$ ஐக் காண்க.

7. பின்வரும் எல்லைகளை மதிப்பிடுக.

   (a) $\lim_{x \to -3} \frac{x^4 - 81}{x^3 + 27}$

   (b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

   (c) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - 1}{3x^4 + x^2 + 1}$

8. முதல் தத்துவத்தினை பயன்படுத்தி $y = ax^2 + bx + c$ ஐ வகையிடுக.

   $y$ இனால் வரையறுக்கப்படும் வளையி புள்ளி $(0, 1)$ இன் ஊடாக செல்கிறது மற்றும் $\left(-\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right)$ இல் வளையின் சாய்வு பூச்சியம் ஆகும். $a$, $b$ மற்றும் $c$ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

9. ஒருவளையி $C$ ஆனது $x = 3\sin^2(\theta/2)$ மற்றும் $y = \sin^3\theta$ என்னும் பரமானச் சமன்பாட்டால் தரப்படுகின்றது, இங்கு $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ஆகும். $\frac{dy}{dx} = \sin 2\theta$ எனக் காட்டுக.

   $C$ இல் புள்ளி $P$ யில் உள்ள தொடலியின் படித்திறன் $\frac{\sqrt{3}}{2}$ எனின், $P$ உடன் தொடர்புடைய பரமானம் $\theta$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

10. $y = x^2$ மற்றும் $y = 2x - x^2$ வளையிகளால் உள்ளடைக்கப்பட்ட செவ்வக தெக்காட்டின் தளத்திலுள்ள பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

## பகுதி B

11. (a) $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots$ என்னும் தொடரின் பொது உறுப்பை எழுதுக. $f(r) = \frac{1}{r^2}$ ஏனின், $f(r) - f(r+1)$ இற்கான ஒரு கோவையை வெளிப்படுத்துக.

   **இதிலிருந்து,** $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots$ என்னும் தொடரின் முதல் $n$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

   இத் தொடரின் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க மற்றும் இத் தொடர் ஒருங்குமா அல்லது இல்லையா எனக் காண்க.

   (b) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$ மற்றும் $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}$ எனக் காட்டுக.

   **இதிலிருந்து** $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^4$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

12. (a) சிக்கலெண்கள் $z_1$=2+2$i$ மற்றும் $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ ஆகன் வரிப்படத்தில் $A$ மற்றும் $B$ புள்ளிகளால் வகைக்குறிக்கப்படுகின்றன. இங்கு $O$ உற்பத்தி ஆகும்.

(i) $z_1$ மற்றும் $z_2$ ஐ ஆகன் வரிப்படத்தில் குறிக்க.

(ii) $OA, OB$ மற்றும் $AB$ இன் நீளங்களைக் காண்க.

(iii) $OAB$ என்பது எவ் வகையான முக்கோணி?

(iv) $OABC$ ஒரு செவ்வகம் எனின், $C$ ஆல் வகைக்குறிக்கப்படும் சிக்கலெண் என்ன?

(b) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ எனின், $n$ இன் நேர்ப் பெறுமானங்களுக்கு,

$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$ மற்றும் $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta$ எனக் காட்டுக.

**இதிலிருந்து,** $32cos^6\theta = \cos 6\theta + 6cos4\theta + 15cos2\theta + 10$ மற்றும்

$32sin^6\theta = -\cos 6\theta + 6cos4\theta - 15cos2\theta + 10$ எனக் காட்டுக.

13. பின்வரும் சார்புகளை $x$ குறித்து வகையிடுக.

(a) $y = (x^2 + 1)(3x^2 - 7)$

(b) $y = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

(c) $y = \sin^2 x + \tan^2 x$

(d) $y = x^{3x}$

14. (a)வளையி $y = \frac{x-2}{(x-1)(x+2)}$ வின் நிலையான புள்ளிகளைக் காண்க மற்றும் அவை தொடர்பு உயர்வுப் புள்ளிகளா,தொடர்பு இழிவுப் புள்ளிகளா அல்லது விபத்திப் புள்ளிகளா எனத் துணிக.

**இதிலிருந்து,** சார்பின் வரைபை வரைக.

(b) உயரம் $h$ மற்றும் ஆரை $r$ ஐயும் உடைய ஒரு கூம்பில் இருக்கக்கூடிய உருளையின் உயர் கனவளவு உருளை மற்றும் கூம்பின் அச்சுக்கள் பொருந்தும் போது $\frac{4}{27}\pi r^2 h$ எனக் காட்டுக.

15. (a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{sin^2x+cos^2x}dx$ மற்றும் $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{sin^2x+cos^2x}dx$ எனின் பொருத்தமான பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $I = J$ என நிறுவுக.

**இதிலிருந்து,** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{sin^2x+cos^2x}dx$ ஐ மதிப்பிடுக.

(b) பின்வரும் தொகையீடுகளை மதிப்பிடுக.

(i) $\int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} dx$

(ii) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

(iii) $\int xe^x dx$

16. (a) வளையி $y^2 = 4ax$ இன் பகுதி $0 \leq x \leq a$ ஆயிடையில் $x$-அச்சு பற்றி நான்கு செங்கோணங்களாக சுழற்றப்படும் போது பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவைக் காண்க.

(b) $A^{-1} = -A$ என ஆகுமாறு $A$ ஒரு தாயம் ஆகும்.

(i) $A^2 = -I$ எனக் காட்டுக.

(ii) $A^4 + A^3 + A^2 + A + A^{-1} = kA$ என ஆகுமாறு $k$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(iii) $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ 2 & -a \end{pmatrix}$ மற்றும் $A^{-1} = -A$ எனின், $a$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

17. வட்டங்கள் $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ மற்றும் $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ நிமிர்கோணமாக இடைவெட்டும் எனின், $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$ எனக் காட்டுக.

$x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ மற்றும் $x^2 + y^2 - 2x - 10y - 4 = 0$ வட்டங்களை நிமிர்கோணமாக இடைவெட்டுவதும் உற்பத்தியினுடாக செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.