

ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
ස්වභාවික විද්‍යා පීඨය
B.Sc. / B. Ed. උපාධි වැඩසටහන

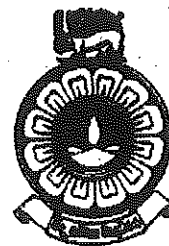


දෙපාර්තමේන්තුව	: ගණිතය
මට්ටම	: 03
විභාගයේ නම	: අවසාන විභාගය
පාඨමාලා මානාකෘති සහ - කේතය	: ව්‍යවහාරික කලනය I - ADE 3200
අධ්‍යයන වර්ෂය	: 2021/22
දිනය	: 2022.10.12
වේලාව	: පෙ.ව. 09.30 - පෙ.ව. 11.30

උපදෙස්

1. ප්‍රශ්න වලට පිළිතුරු දීමට පෙර සියලුම උපදෙස් හොඳින් කියවන්න.
2. මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය පිටු තුනක අන්තර්ගත ප්‍රශ්න 6 කින් සමන්විත වේ.
3. ඕනෑම ප්‍රශ්න 4 කට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. සියලුම ප්‍රශ්න සමාන ලකුණු වලින් යුක්ත වේ.
4. සෑම ප්‍රශ්නයකටම පිළිතුරු තව පිටුවකින් ආරම්භ විය යුතුය.
5. විභාග නීති කඩවන පරිදි ඕනෑම ක්‍රියාකාරකමකට සම්බන්ධ වීම දඬුවම් ලැබිය හැකි වරදක් වේ.
6. ප්‍රශ්න වලට පිළිතුරු දීමට නිල් හෝ කළු තීන්ත සහිත පෑනක් භාවිතා කරන්න.
7. ඔබේ පිළිතුරු පත්‍රයේ ඔබේ විභාග අංකය (Index number) පැහැදිලිව සඳහන් කරන්න.

The Open University of Sri Lanka
Faculty of Natural Sciences
B.Sc. / B. Ed. Degree Programme



Department	: Mathematics
Level	: 03
Name of the Examination	: Final Examination
Course Title and - Code	: Applied Calculus I – ADE 3200
Academic Year	: 2021/22
Date	: 12.10.2022
Time	: 09.30a.m. –11.30a.m.
Duration	: Two Hours

General Instructions

1. Read all instructions carefully before answering the questions.
2. This question paper consists of (6) questions in (2) pages.
3. Answer any (4) questions only. All questions carry equal marks.
4. Answer for each question should commence from a new page.
5. Involvement in any activity that is considered as an exam offense will lead to punishment.
6. Use blue or black ink to answer the questions.
7. Clearly state your index number in your answer script.

ඔනෑම ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න

1. පහත ප්‍රකාශයන් සත්‍ය ද අසත්‍ය ද යන්න නිර්ණය කරන්න. එක් එක් අවස්ථාවකදීම ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.
 - a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ අර්ථ දැක්වෙන f ශ්‍රිතයේ වසම, සියලුම තාත්වික අගයන් ගෙන් සමන්විත වන කුලකය වන අතර පරාසය, $[0, \infty)$ වේ. (ලකුණු 05)
 - b) සියලු x සඳහා $f'(x)$ පවතී නම් සහ f ශ්‍රිතයෙහි, $x = 1$ හි දී උපරිමයක් ඇත්නම්, $f'(1) = 0$ වේ. (ලකුණු 05)
 - c) $f(x) = 3x^2 + x - 1$ නම් f ශ්‍රිතය $x = 1$ හි දී සන්නික වේ. (ලකුණු 05)
 - d) සියලුම $x > 0$ සඳහා $\ln(x)$ ශ්‍රිතය අවකලය වේ. (ලකුණු 05)
 - e) $y = 2e^x$ නම් $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = y$ වේ. (ලකුණු 05)

[මුළු ලකුණු 25]

2. $f(x) = x^4 - 4x^3$ මගින් අර්ථ දැක්වෙන f ශ්‍රිතය සලකන්න.
 - a) f ශ්‍රිතයෙහි වසම කුමක්ද? (ලකුණු 02)
 - b) x - අන්තඃඛණ්ඩය/යන් සහ y - අන්තඃඛණ්ඩය නිර්ණය කරන්න. (ලකුණු 03)
 - c) $f'(x)$ සොයන්න. f ශ්‍රිතය වැඩිවන සහ/හෝ අඩුවන ප්‍රාන්තරය(න්) නිර්ණය කරන්න. උපරිම හෝ/සහ අවම ලක්ෂ්‍ය හඳුනාගෙන ඒවායේ අගයන් පවතින නම් නිර්ණය කරන්න? (ලකුණු 05)
 - d) $f''(x)$ සොයන්න. f ශ්‍රිතය ඉහළට අවතල සහ/හෝ පහළට අවතල ප්‍රාන්තරය(න්) පවතී නම් ඒවා නිර්ණය කරන්න. විවර්තන ලක්ෂ්‍ය පවතින නම් ඒවායේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න. (ලකුණු 05)
 - e) සීමා $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ සහ සීමා $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ සොයන්න. (ලකුණු 02)
 - f) f ශ්‍රිතයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න. (ලකුණු 08)

[මුළු ලකුණු 25]

3. පහත ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න

- a) $x = 4$ ලක්ෂ්‍යයේදී $f(x) = \sqrt{x} + 5x^2$ ශ්‍රිතයට අදින ලද ස්පර්ශක රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න. (ලකුණු 05)
- b) ව්‍යුත්පන්න අර්ථ දැක්වීම් භාවිතා කරමින් $g(x) = \sqrt{x+1}$ හි x විෂයයේ ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න. (ලකුණු 10)

Answer any **FOUR** questions only

1. Determine whether the following statements are **TRUE** or **FALSE**. In each case justify your answer.

- a) The function f defined by $f(x) = \sqrt{x-1}$, has the set of all real numbers as domain and $[0, \infty)$ as the range. (05 marks)
- b) If $f'(x)$ is defined for all x and f has a maximum at $x = 1$, then $f'(1) = 0$. (05 marks)
- c) If $f(x) = 3x^2 + x - 1$, then f is continuous at $x = 1$. (05 marks)
- d) The function $\ln(x)$ is differentiable for all $x > 0$. (05 marks)
- e) If $y = 2e^x$, then $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = y$. (05 marks)

[Total marks 25]

2. Consider the function f defined by $f(x) = x^4 - 4x^3$.

- a) What is the domain of f ? (02 marks)
- b) Determine the x -intercept(s) and y -intercept. (03 marks)
- c) Find $f'(x)$. Determine the interval(s) where f is increasing and/or decreasing. Identify the points of local maxima or/and minima and determine their values if exist? (05 marks)
- d) Find $f''(x)$. Determine the interval(s) (if any) that the function f is concave up and/or concave down. If there are any inflection points find their coordinates? (05 marks)
- e) Find $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ and $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (02 marks)
- f) Sketch the graph of f . (08 marks)

[Total marks 25]

3. Answer the following questions:

- a) Find the equation of the tangent line drawn to $f(x) = \sqrt{x} + 5x^2$ at the point $x = 4$. (05 marks)
- b) Using the definition of derivatives, find the derivative of $g(x) = \sqrt{x+1}$ with respect to x . (10 marks)
- c) The function $\sin(x^2 + y) = x$, defines y as a function of x implicitly within the interval $(0, \pi)$. **Without** sketching the graph of the function, show that the function is decreasing near $x = 0$. (10 marks)

[Total marks 25]

- c) $\sin(x^2 + y) = x$ ශ්‍රිතය $(0, \pi)$ ප්‍රාන්තරය තුළ x හි අධ්‍යාපනය ශ්‍රිතයක් (implicit function) ලෙස y අර්ථ දක්වයි. ප්‍රස්තාරයේ සලකුණු කිරීමකින් තොරව, ශ්‍රිතය $x = 0$ ආසන්නයේ අවරෝහණය වන බව පෙන්වන්න.

(ලකුණු 10)

[මුළු ලකුණු 25]

4.

- a) යටිකුරු කල කේතුවක උස 20 cm ක් වන අතර විවෘත අරය 8 cm වේ. කේතුව ආරම්භයේදී ජලයෙන් පිරී පවතී. ජලය 15 cm^3 ක නියත ශීඝ්‍රතාවයකින් කාන්දු වීමට පටන් ගත්තේ යැයි සිතන්න. කේතුවෙහි උසෙන් හරි අඩක් ජලය පිරී ඇති මොහොතේදී ජලමට්ටම පහත වැටෙන ශීඝ්‍රතාවය සොයන්න.

(සටහන: කේතුවක පරිමාව $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, මෙහි r යනු අරය වන අතර h යනු උස වේ).

(ලකුණු 15)

- b) පහත අර්ථ දක්වා ඇති f ශ්‍රිතය පවතිනම්, ශ්‍රිතය $x = 1$ හි අඛණ්ඩව පවතින පරිදි b හි අගය සොයන්න.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)} & x \leq 1 \text{ සඳහා} \\ -(x-3)^2 + b & x > 1 \text{ සඳහා} \end{cases}$$

(ලකුණු 10)

[මුළු ලකුණු 25]

5.

- a) $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ අනුක්‍රමය අභිසාරී ද අපසාරීද යන්න සඳහන් කරන්න. ඔබේ පිළිතුර පැහැදිලි කරන්න.

(ලකුණු 05)

- b) $n \in \mathbb{N}$ සඳහා $a_1 = \sqrt{2}$ සහ $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇති පරිදි $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ වැඩිවන අනුක්‍රමය සලකන්න.

- i) සියලු $n \in \mathbb{N}$ සඳහා $a_n \leq 2$ බව පෙන්වන්න.

(ලකුණු 10)

- ii) අනුක්‍රමය අභිසාරී බව නිගමනය කර සීමාව ලියා දක්වන්න.

(ලකුණු 10)

[මුළු ලකුණු 25]

4. a) The height of an inverted cone is 20 cm and the opening radius is 8 cm. The cone is initially filled with water. Suppose that water starts draining at a constant rate of 15 cm^3 per second. Find the rate at which the water drops when water level is halfway down the cone?

(Note: The volume of a cone is $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, where r is the radius and h is the height)

(15 marks)

- b) Consider the piecewise function f defined below. Find the value of b such that the function is continuous at $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)} & \text{for } x \leq 1 \\ -(x-3)^2 + b & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

(10 marks)

[Total marks 25]

5. a) State whether $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ converges or diverges. Explain your answer. (05 marks)

- b) Consider the increasing sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ with $a_1 = \sqrt{2}$ and $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ for $n \in \mathbb{N}$.

i) Show that $a_n \leq 2$ for all $n \in \mathbb{N}$. (10 marks)

ii) Conclude that the sequence is convergent and write the limit. (10 marks)

[Total marks 25]

6. a) Use comparison test to show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5 + 3}$ is convergent. (09 marks)

- b) For each of the following, determine whether the series converges.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ (08 marks)

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+1)!}{(3n)!}$ (08 marks)

[Total marks 25]

***** END OF QUESTION PAPER *****

6.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5 + 3}$ අභිසාරී බව පෙන්වීමට සංසන්දනාත්මක පරීක්ෂාව (comparison test) භාවිතා කරන්න.

(ලකුණු 09)

b) පහත එක් එක් ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේද යන්න තීරණය කරන්න.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ (ලකුණු 08)

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+1)!}{(3n)!}$ (ලකුණු 08)

[මුළු ලකුණු 25]

***** ප්‍රශ්න පත්‍රයේ අවසානය *****

