053

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்

இயற்கை விஞ்ஞானங்கள் பீடம்

விஞ்ஞானமாணி / கல்விமாணி பட்டப்பாடநெறி

திணைக்களம்	: கணிதம்
மட்டம்	: 03
பரீட்சையின் பெயர்	: இறுதிப் பரீட்சை
கற்கை தலைப்பு மற்றும் - குறியீடு	: பிரயோக நுண்கணிதம் I - ADE 3200
கல்வி ஆண்டு	: 2021/22
திகதி	: 12.10.2022
நேரம்	: மு.ப 09.30 – மு.ப 11.30
காலம்	: இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

பொது அறிவுறுத்தல்கள்

1. வினாக்களுக்கு விடையளிக்க முன் அனைத்து அறிவுறுத்தல்களையும் கவனமாக வாசிக்கவும்.
2. இவ் வினாப்பத்திரமானது 06 வினாக்களை 02 பக்கங்களில் கொண்டுள்ளது.
3. ஏதேனும் 04 வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக. எல்லா வினாக்களும் சமமான புள்ளிகளை கொண்டுள்ளன.
4. ஒவ்வொரு வினாக்குமான விடை ஒரு புதிய பக்கத்தில் ஆரம்பிக்கப்பட வேண்டும்.
5. பரீட்சைக் குற்றமாக கருதப்படும் எந்தவொரு செயலிலும் ஈடுபடுவது தண்டனைக்கு வழிவகுக்கும்.
6. வினாக்களுக்கு விடையளிக்கையில் நீல அல்லது கறுப்பு வண்ண மை ஒன்றை பயன்படுத்தவும்
7. உங்களுடைய சுட்டெண்ணை உங்களுடைய விடைத்தாளில் தெளிவாக குறிப்பிடவும்.

The Open University of Sri Lanka
Faculty of Natural Sciences
B.Sc. / B. Ed. Degree Programme

Department	**: Mathematics**
Level	**: 03**
Name of the Examination	**: Final Examination**
Course Title and - Code	**: Applied Calculus I – ADE 3200**
Academic Year	**: 2021/22**
Date	**: 12.10.2022**
Time	**: 09.30a.m. –11.30a.m.**
Duration	**: Two Hours**

General Instructions

1. Read all instructions carefully before answering the questions.
2. This question paper consists of (6) questions in (2) pages.
3. Answer any (4) questions only. All questions carry equal marks.
4. Answer for each question should commence from a new page.
5. Involvement in any activity that is considered as an exam offense will lead to punishment.
6. Use blue or black ink to answer the questions.
7. Clearly state your index number in your answer script.

ஏதேனும் **நான்கு** வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

1. பின்வரும் கூற்றுக்கள் **உண்மையானதா** அல்லது **பொய்யானதா** என்பதைத் துணிக. ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் உமது விடையை நியாயப்படுத்துக:

   a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ இனால் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு f ஆனது, அனைத்து மெய் எண்களையும் ஆட்சியாகவும் மற்றும் $[0, \infty)$ இனை வீச்சாகவும் கொண்டுள்ளது. (05 புள்ளிகள்)

   b) அனைத்து x இற்கும் $f'(x)$ வரையறுக்கப்பட்டு மற்றும் $x = 1$ இல் f ஆனது உயர்வைக் கொண்டுள்ளது எனின், $f'(1) = 0$ ஆகும். (05 புள்ளிகள்)

   c) $f(x) = 3x^2 + x - 1$ எனின், $x = 1$ இல் f தொடர்ச்சியானதாக இருக்கும். (05 புள்ளிகள்)

   d) அனைத்து $x > 0$ இற்கும் சார்பு $\ln(x)$ வகையிடத் தக்கதாக இருக்கும். (05 புள்ளிகள்)

   e) $y = 2e^x$ எனின், $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = y$ ஆகும். (05 புள்ளிகள்)

[மொத்தம் 25 புள்ளிகள்]

2. $f(x) = x^4 - 4x^3$ இனால் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு f இனைக் கருதுக.

   a) f இன் ஆட்சி என்ன? (02 புள்ளிகள்)

   b) $x -$இடைவெட்டு(கள்) மற்றும் $y -$ இடைவெட்டு என்பவற்றைத் துணிக. (03 புள்ளிகள்)

   c) $f'(x)$ இனைக் காண்க. f அதிகரிக்கும் மற்றும்/அல்லது குறையும் ஆயிடை(கள்) ஐ துணிக. ஓரிட உயர்வு அல்லது/மற்றும் இழிவுப் புள்ளிகளை கண்டறிக மற்றும் அவற்றுக்கு பெறுமதிகள் இருப்பின் அவற்றைத் துணிக. (05 புள்ளிகள்)

   d) $f''(x)$ இனைக் காண்க. சார்பு f மேல் குழிவு மற்றும்/அல்லது கீழ் குழிவு என்பவற்றிற்கான ஆயிடை(களை) (ஏதாவது இருப்பின்) கணிக்க. விபத்திப் புள்ளிகள் ஏதேனும் இருப்பின் அவற்றினுடைய ஆள்கூறுகளை காண்க. (05 புள்ளிகள்)

   e) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ மற்றும் $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ இனைக் காண்க. (02 புள்ளிகள்)

   f) f இன் வரைபை வரைக. (08 புள்ளிகள்)

[மொத்தம் 25 புள்ளிகள்]

3. பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளிக்குக.

   a) $x = 4$ என்னும் புள்ளியில் $f(x) = \sqrt{x} + 5x^2$ இற்கு தொடலிக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (05 புள்ளிகள்)

   b) வரைவிலக்கணத்தைப் பயன்படுத்தி, x குறித்து $g(x) = \sqrt{x+1}$ இன் வகையீட்டைக் காண்க. (10 புள்ளிகள்)

Answer any **FOUR** questions only

1. Determine whether the following statements are **TRUE** or **FALSE**. In each case justify your answer.
   a) The function f defined by $f(x) = \sqrt{x-1}$, has the set of all real numbers as domain and $[0, \infty)$ as the range. (05 marks)
   b) If $f'(x)$ is defined for all x and f has a maximum at $x = 1$, then $f'(1) = 0$. (05 marks)
   c) If $f(x) = 3x^2 + x - 1$, then f is continuous at $x = 1$. (05 marks)
   d) The function $\ln(x)$ is differentiable for all $x > 0$. (05 marks)
   e) If $y = 2e^x$, then $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = y$. (05 marks)

[Total marks 25]

2. Consider the function f defined by $f(x) = x^4 - 4x^3$.
   a) What is the domain of f? (02 marks)
   b) Determine the x −intercept(s) and y −intercept. (03 marks)
   c) Find $f'(x)$. Determine the interval(s) where f is increasing and/or decreasing. Identify the points of local maxima or/and minima and determine their values if exist? (05 marks)
   d) Find $f''(x)$. Determine the interval(s) (if any) that the function f is concave up and/or concave down. If there are any inflection points find their coordinates? (05 marks)
   e) Find $\lim_{x\to\infty} f(x)$ and $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. (02 marks)
   f) Sketch the graph of f. (08 marks)

[Total marks 25]

3. Answer the following questions:
   a) Find the equation of the tangent line drawn to $f(x) = \sqrt{x} + 5x^2$ at the point $x = 4$. (05 marks)
   b) Using the definition of derivatives, find the derivative of $g(x) = \sqrt{x+1}$ with respect to x. (10 marks)
   c) The function $\sin(x^2 + y) = x$, defines y as a function of x implicitly within the interval $(0, \pi)$. **Without** sketching the graph of the function, show that the function is decreasing near $x = 0$. (10 marks)

[Total marks 25]

c) $\sin(x^2 + y) = x$ சார்பு, y என்பது x இன் சார்பு என மறைமுகமாக ஆயிடை $(0, \pi)$ இல் வரையறுக்கிறது. சார்பின் வரைபை வரையாமல், சார்பு $x = 0$ இற்கு அருகில் குறைந்து வருகிறது எனக் காட்டுக. (10 புள்ளிகள்)

[மொத்தம் 25 புள்ளிகள்]

4. a) ஒரு தலைகீழ் கூம்பின் உயரம் 20 cm மற்றும் ஆரம்ப ஆரை 8 cm ஆகும், அது ஆரம்பத்தில் நீரால் நிரப்பபட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு செக்கனிற்கும் 15 cm^3 என்னும் நிலையான விகிதத்தில் இப்போது கூம்பிலிருந்து நீர் வெளியேறுகிறது. இதன் விளைவாக நீரின் மேற்பரப்பு மட்டம் வீழ்ச்சியடைகிறது. கூம்பின் அரைவாசியிற்கு குறைவாக நீர் இருக்கும் போது நீர் மட்டம் வீழ்ச்சியடையும் வீகிதத்தைக் காண்க.

(குறிப்பு: ஒரு கூம்பின் கணவளவு $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ஆகும், இங்கு r என்பது ஆரை மற்றும் h என்பது உயரம்) (15 புள்ளிகள்)

b) கீழே வரையறுக்கப்பட்டுள்ள துண்டு துண்டான சார்பு f இனைக் கருதுக. $x = 1$ இல் சார்பு தொடர்ச்சியாக இருக்குமாறான b இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)} & x \leq 1 \\ -(x-3)^2 + b & x > 1 \end{cases}$$

(10 புள்ளிகள்)

[மொத்தம் 25 புள்ளிகள்]

5. a) $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ ஒருங்குமா அல்லது விரியுமா எனக் குறிப்பிடுக. உமது விடையை விளக்குக. (05 புள்ளிகள்)

b) அனைத்து $n \in \mathbb{N}$ இற்கும் $a_1 = \sqrt{2}$ மற்றும் $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ உடன் அதிகரிக்கும் தொடர் $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ இனைக் கருதுக.

i) அனைத்து $n \in \mathbb{N}$ இற்கும் $a_n \leq 2$ எனக் காட்டுக. (10 புள்ளிகள்)

ii) தொடர் ஒருங்குகின்றது எனத் தீர்மானித்து எல்லையை எழுதுக. (10 புள்ளிகள்)

[மொத்தம் 25 புள்ளிகள்]

6. a) ஒப்பீட்டுச் சோதனையைப் பயன்படுத்தி $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5 + 3}$ என்னும் தொடர் ஒருங்கும் எனக் காட்டுக. (09 புள்ளிகள்)

b) பின்வரும் ஒவ்வொன்றுக்கும், தொடர் ஒருங்குகின்றதா எனத் துணிக.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ (08 புள்ளிகள்)

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+1)!}{(3n)!}$. (08 புள்ளிகள்)

[மொத்தம் 25 புள்ளிகள்]

**********வினாத்தாளின் முடிவு*********

4. a) The height of an inverted cone is 20 cm and the opening radius is 8 cm. The cone is initially filled with water. Suppose that water starts draining at a constant rate of 15 cm^3 per second. Find the rate at which the water drops when water level is halfway down the cone?

(Note: The volume of a cone is $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, where r is the radius and h is the height)

(15 marks)

b) Consider the piecewise function f defined below. Find the value of b such that the function is continuous at $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)} & \text{for } x \leq 1 \\ -(x-3)^2 + b & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

(10 marks)

[Total marks 25]

5. a) State whether $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ converges or diverges. Explain your answer. (05 marks)

b) Consider the increasing sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ with $a_1 = \sqrt{2}$ and $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ for $n \in \mathbb{N}$.

i) Show that $a_n \leq 2$ for all $n \in \mathbb{N}$. (10 marks)

ii) Conclude that the sequence is convergent and write the limit. (10 marks)

[Total marks 25]

6. a) Use comparison test to show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5 + 3}$ is convergent. (09 marks)

b) For each of the following, determine whether the series converges.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ (08 marks)

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+1)!}{(3n)!}$ (08 marks)

[Total marks 25]

********* END OF QUESTION PAPER *********