ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්ව විද්‍යාලය

ස්වභාවික විද්‍යා පීඨය

විද්‍යාවේදී / අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව

දෙපාර්තමේන්තුව	: ගණිතය
මට්ටම	: තුන්වන
විභාගයේ නම	: අවසාන විභාගය
පාඨමාලා නාමය - පාඨමාලා කේතය	: දෛශික වීජ ගණිතය – ADU3300
අධ්‍යයන වර්ෂය	: 2021/22
දිනය	: 15.10.2022
වේලාව	: ප. ව. 1.30 සිට ප. ව. 3.30
කාලය	: පැය 2 යි.

උපදෙස්

1. පිළිතුරු ලිවීමට ප්‍රථම දී ඇති උපදෙස් සැලකිලිමත්ව කියවන්න.
2. ප්‍රශ්න පත්‍රය ප්‍රශ්න 6 කින් සමන්විත අතර එය පිටු 03 ක අඩංගු වේ.
3. සියලුම ප්‍රශ්න සඳහා සමාන ලකුණු හිමිවන අතර ප්‍රශ්න 04 කට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
4. සෑම ප්‍රශ්නයක් සඳහාම පිළිතුරු නව පිටුවකින් ආරම්භ කරන්න.
5. අවශ්‍ය නම් පමණක් දළ රූප සටහන් පැහැදිලිව සළකුණු කරන්න.
6. විභාගය සම්බන්ධ ඕනෑම ආකාරයක වංචනික ක්‍රියාවකට සම්බන්ධ වීම දඬුවම් ලැබිය හැකි වරදකි.
7. නිල් හෝ කළු තීන්ත සහිත පෑනක් භාවිතා කරන්න.
8. විභාග අංකය පැහැදිලිව පිළිතුරු පත්‍රයෙහි සඳහන් කරන්න.

The Open University of Sri Lanka
Faculty of Natural Sciences
B.Sc. / B. Ed. Degree Programme

Department	**: Mathematics**
Level	**: 03**
Name of the Examination	**: Final Examination**
Course Title and - Course Code	**: Vector Algebra – ADU3300**
Academic Year	**: 2021/22**
Date	**: 15.10.2022**
Time	**: 1.30 p.m. To 3.30 p.m.**
Duration	**: Two Hours.**

General Instructions

1. Read all instructions carefully before answering the questions.
2. This question paper consists of **(6)** questions in **(3)** pages.
3. Answer any **(4)** questions only. All questions carry equal marks.
4. Answer for each question should commence from a new page.
5. Draw fully and clearly labelled diagrams where necessary.
6. Involvement in any activity that is considered as an exam offense will lead to punishment.
7. Use blue or black ink to answer the questions.
8. Clearly state your index number in your answer script.

(01) (a) ABC ත්‍රිකෝණයෙහි, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{BC}=\underline{v}$ සහ $\overrightarrow{CA}=\underline{w}$ වේ. $\underline{u}\times\underline{v}=\underline{v}\times\underline{w}=\underline{w}\times\underline{u}$ බව පෙන්වන්න. එනයින් ABC ත්‍රිකෝණය සඳහා වූ සයින් සූත්‍රය සාධනය කරන්න.

(b) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{4}$ සහ $x-3=\dfrac{y-k}{2}=z$ රේඛා දෙක ඡේදනය වේ.

(i) රේඛා දෙක සඳහා දෛශික සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

(ii) k හි අගය ගණනය කරන්න.

(iii) එනයින් රේඛා දෙක පිහිටි තලයේ කාටිසියානු සමීකරණය සොයන්න.

(c) $P_1(2,-1,1)$, $P_2(3,2,-1)$ සහ $P_3(-1,3,2)$ ලක්ෂ්‍ය පිහිටි තලයේ දෛශික සමීකරණය සොයන්න.

(d) O මූල ලක්ෂ්‍යයකට සාපේක්ෂව P_1 සහ P_2 ලක්ෂවල පිහිටුම් දෛශික $\underline{r_1},\underline{r_2}$ සහ $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ දිශා කෝසයින පිළිවෙලින් (l_1,m_1,n_1) සහ (l_2,m_2,n_2) වේ.

(i) $\overrightarrow{P_1P_2}=(r_2l_2-r_1l_1)\underline{i}+(r_2m_2-r_1m_1)\underline{j}+(r_2n_2-r_1n_1)\underline{k}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $r_1=|\underline{r_1}|$ සහ $r_2=|\underline{r_2}|$ වේ.

(ii) θ යනු $\overrightarrow{OP_1}$ සහ $\overrightarrow{OP_2}$ අතර සුළු කෝණය වේ. $\cos\theta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2$ බව පෙන්වන්න.

(02) (a) O මූල ලක්ෂ්‍යයකට සාපේක්ෂව A,B සහ C ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික $\underline{a}=\underline{i}+\underline{j}+\underline{k}$, $\underline{b}=\underline{i}$ සහ $\underline{c}=\underline{i}+2\underline{j}+2\underline{k}$ වේ. AN රේඛාවෙහි දෛශික සමීකරණය ලියා දක්වන්න. මෙහි N යනු BC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් වන අතර AN හා BC ලම්භක වේ.

(b) $x+y+z=21$ තලය හා $x-1=y+2=2z+3$ රේඛාව අතර ඇති කෝණය සොයන්න.

(c) $x-6=\dfrac{2-y}{2}=\dfrac{z-2}{2}$ සහ $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{-2}$ විතල රේඛාවන් අතර වූ කෙටිම දුර සොයන්න.

(d) $\underline{r}=\left(1-\dfrac{16\cos\theta}{\sqrt{14}}+\dfrac{8\sin\theta}{\sqrt{5}}\right)\underline{i}+\dfrac{24\cos\theta}{\sqrt{14}}\underline{j}+\left(2+\dfrac{8\cos\theta}{\sqrt{14}}+\dfrac{16\sin\theta}{\sqrt{5}}\right)\underline{k}$ පථය වෘත්තයක් බව පෙන්වා එහි අරය සහ කේන්ද්‍රය සොයන්න.

(01) (a) In a triangle ABC, let $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$ and $\overrightarrow{CA} = \underline{w}$. Show that

$\underline{u} \times \underline{v} = \underline{v} \times \underline{w} = \underline{w} \times \underline{u}$ and hence prove the Sin Rule for the triangle ABC.

(b) If the two lines $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{4}$ and $x-3 = \dfrac{y-k}{2} = z$ intersect, then

(i) Write down the equation of the two lines in vector form.

(ii) find the value of k,

(iii) hence find the Cartesian equation of the plane containing these two lines.

(c) Find a vector equation for the plane determined by the points $P_1(2,-1,1)$, $P_2(3,2,-1)$ and $P_3(-1,3,2)$.

(d) The position vectors of the points P_1 and P_2 relative to an origin O are $\underline{r_1}, \underline{r_2}$ and the direction cosines of $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$ are (l_1, m_1, n_1) and (l_2, m_2, n_2) respectively.

(i) Show that $\overrightarrow{P_1P_2} = (r_2 l_2 - r_1 l_1)\underline{i} + (r_2 m_2 - r_1 m_1)\underline{j} + (r_2 n_2 - r_1 n_1)\underline{k}$ where $r_1 = |\underline{r_1}|$ and $r_2 = |\underline{r_2}|$.

(ii) If θ is the angle between $\overrightarrow{OP_1}$ and $\overrightarrow{OP_2}$, show that

$$\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2.$$

(02) (a) Let $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$, $\underline{b} = \underline{i}$ and $\underline{c} = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$ be the position of vectors of the points A, B and C with respect to the origin O of a right-handed Cartesian co-ordinate system. Write down the equation of the line AN, where the point N is on the line BC such that AN is perpendicular to BC.

(b) Find the angle between the plane $x + y + z = 21$ and the line

$x - 1 = y + 2 = 2z + 3$.

(c) Find the shortest distance between the skew lines $x - 6 = \dfrac{2-y}{2} = \dfrac{z-2}{2}$ and $\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+1}{-2}$.

(d) Show that the curve

$$\underline{r} = \left(1 - \frac{16\cos\theta}{\sqrt{14}} + \frac{8\sin\theta}{\sqrt{5}}\right)\underline{i} + \frac{24\cos\theta}{\sqrt{14}}\underline{j} + \left(2 + \frac{8\cos\theta}{\sqrt{14}} + \frac{16\sin\theta}{\sqrt{5}}\right)\underline{k}$$

is a circle. Find its centre and the radius.

(03) (a) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ සහ $\underline{d}$ දෛශික වන අතර සාමාන්‍ය අංකනය පරිදි $[\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}] = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$ වේ. පහත ප්‍රතිඵල සාධනය කරන්න.

(i) $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{b} \cdot \underline{c})(\underline{a} \cdot \underline{d})$ බව පෙන්වා

එනයින්

$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) + (\underline{b} \times \underline{c}) \cdot (\underline{a} \times \underline{d}) + (\underline{c} \times \underline{a}) \cdot (\underline{b} \times \underline{d}) = 0$ සහ

$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot [(\underline{b} \times \underline{c}) \times (\underline{c} \times \underline{a})] = [\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}]^2$ අපෝහනය කරන්න.

(b) පහත සමගාමී සමීකරණ විසඳා $\underline{x}$ හා $\underline{y}$ සොයන්න. මෙහි $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ දී ඇති දෛශික වේ.

$$\underline{x} + \underline{y} = \underline{a}$$

$$\underline{x} \times \underline{y} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \cdot \underline{a} = 1$$

(04) (a) $\underline{G}, \underline{H}$ සහ $\underline{F}$ දෛශික ශ්‍රිත $\underline{G}(t) = 2t^2 \underline{i} - e^t \underline{j} + \frac{1}{e^t} \underline{k}$, $\underline{H}(t) = (1-t)\underline{i} + 2t\underline{j}$

$\underline{F}(t) = e^{-t} \cos t \, \underline{i} + \cos t \, \underline{k}$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇත. $B(t) \cos t = \underline{G}(t) \cdot [\underline{H}(t) \times \underline{F}(t)]$

වන පරිදි වූ B ශ්‍රිතය නිශ්චය කරන්න. එනයින් $t = 1$ හිදී ශ්‍රිතයෙහි වසම සොයන්න.

(b) $\underline{F}(t) = \frac{t-2}{t^2-4} \underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2-t}} \underline{j} + \ln(9-t^2) \underline{k}$ දෛශික ශ්‍රිතයෙහි වසම සොයන්න.

(c) කාලය t හිදී අංශුවක් සඳහා වූ පිහිටුම් දෛශිකය $\operatorname{cosec}^{-1}(t)\, \underline{i} + \frac{t}{\log(1+t)} \underline{j} + t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \underline{k}$

මගින් දෙනු ලැබේ. $t \to \infty$ හිදී අංශුව සඳහා පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න.

(d) l රේඛාව $\underline{a}$ දෛශිකයට සමාන්තර වන අතර පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{b}$ වූ B ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරයි. C ලක්ෂ්‍යයෙහි පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{c}$ සහ C ලක්ෂ්‍යයේ සිට l රේඛාවට ඇඳි ලම්භයේ අඩියෙහි පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{p}$ නම් $\underline{p} = \underline{b} + \frac{(\underline{c} - \underline{b}) \cdot \underline{a}}{|\underline{a}|^2} \underline{a}$ බව සාධනය කරන්න.

(03) (a) Let $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ and $\underline{d}$ be vectors and as usual the notation $[\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}]=(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c}$ applies. Prove the following results.

(i) $(\underline{a}\times\underline{b})\cdot(\underline{c}\times\underline{d})=(\underline{a}\cdot\underline{c})(\underline{b}\cdot\underline{d})-(\underline{b}\cdot\underline{c})(\underline{a}\cdot\underline{d})$

Deduce that,

$$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot(\underline{c}\times\underline{d})+(\underline{b}\times\underline{c})\cdot(\underline{a}\times\underline{d})+(\underline{c}\times\underline{a})\cdot(\underline{b}\times\underline{d})=0,$$

$$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\left[(\underline{b}\times\underline{c})\times(\underline{c}\times\underline{a})\right]=[\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}]^2.$$

(b) Solve the following simultaneous vector equation for $\underline{x}$ and $\underline{y}$

$\underline{x}+\underline{y}=\underline{a},\ \underline{x}\times\underline{y}=\underline{b},\ \underline{x}\cdot\underline{a}=1$ where $\underline{a}$ and $\underline{b}$ are given vectors.

(04) (a) Let the vector valued functions $\underline{G}, \underline{H}$ and $\underline{F}$ be given by

$\underline{G}(t)=2t^2\underline{i}-e^t\underline{j}+\frac{1}{e^t}\underline{k},\ \underline{H}(t)=(1-t)\underline{i}+2t\underline{j}$ and

$\underline{F}(t)=e^{-t}\cos t\,\underline{i}+\cos t\,\underline{k}.$

Determine a function B such that $B(t)\cos t=\underline{G}(t)\cdot[\underline{H}(t)\times\underline{F}(t)]$.

Hence, evaluate $B(t)$ when $t=1$.

(b) Find the domain of the vector valued function

$$\underline{F}(t)=\frac{t-2}{t^2-4}\underline{i}+\frac{1}{\sqrt{2-t}}\underline{j}+\ln(9-t^2)\underline{k}.$$

(c) The position vector at time t of a particle moving in space is $\operatorname{cosec}^{-1}(t)\underline{i}+\frac{t}{\log(1+t)}\underline{j}+t\sin\left(\frac{1}{t}\right)\underline{k}$. Find the position vector of this particle as $t\to\infty$.

(d) A straight line l is parallel to a vector $\underline{a}$ and passes through a point B, whose position vector is $\underline{b}$. The point C has position vector $\underline{c}$ and $\underline{p}$ is the position vector of the foot of the perpendicular drawn from C to l.

Prove that $\underline{p}=\underline{b}+\frac{(\underline{c}-\underline{b})\cdot\underline{a}}{|\underline{a}|^2}\underline{a}.$

(05) (a) $\underline{f}(t),\ \underline{g}(t),\ \underline{h}(t)$ යනු t විෂයෙහි අවකල්‍ය දෛශික ශ්‍රිත 03 කි.

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\underline{f}(t)\times\underline{g}(t)\right)\cdot\underline{h}(t)\right]=\left[\frac{d\,\underline{f}(t)}{dt}\times\underline{g}(t)\right]\cdot\underline{h}(t)+\left[\underline{f}(t)\times\frac{d\,\underline{g}(t)}{dt}\right]\cdot\underline{h}(t)+\left(\underline{f}(t)\times\underline{g}(t)\right)\cdot\frac{d\,\underline{h}(t)}{dt}$$

බව පෙන්වන්න.

(b) $\underline{f}(t)$ යනු t හි අවකල්‍ය ශ්‍රිත වේ. $\underline{c}$ යනු නියත දෛශිකයකි.

(i) $\int \underline{f}(t)\times\frac{d^2\underline{f}(t)}{dt^2}\,dt=\underline{f}(t)\times\frac{d\,\underline{f}(t)}{dt}+\underline{c}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\underline{r}(t)=t^2\,\underline{i}+pt\,\underline{j}+t\,\underline{k},\ \ p<0$ සහ $|\underline{r}(1)|=3$. p අගය සොයා

$\int_0^1 \underline{r}(t)\times\frac{d^2\underline{r}(t)}{dt^2}\,dt=\underline{j}+\underline{k}$ අගයන්න.

(c) අංශුවක ත්වරණය t හිදී $\underline{a}(t)=-\cos t\,\underline{i}-\sin t\,\underline{j}$ වේ. ආරම්භයේ දී එහි ප්‍රවේගය $\underline{v}(0)=\underline{j}+\underline{k}$ වන අතර පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{r}(0)=\underline{i}$ වේ. අංශුවෙහි පිහිටුම් දෛශිකය t හිදී සොයන්න.

(06) (a) $x=x(s),\ y=y(s),\ z=z(s)$ පරාමිතික සමීකරණ ඇසුරෙන් C පථය අර්ථ දක්වා ඇති අතර මෙහි s යනු C දිග සිට මනිනු ලබන චාප දිග වේ. C මත ඕනෑම P ලක්ෂ්‍යයක දී පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{r}$ වේ. C වෙත P ලක්ෂ්‍යයක දී වූ ඒකක ස්පර්ශක දෛශිකය $\frac{d\underline{r}}{ds}$ බව පෙන්වන්න.

(b) අවකාශ පථයක සමීකරණය t පරාමිතිය ඇසුරෙන් $\underline{r}(t)=3\cos t\,\underline{i}+3\sin t\,\underline{j}+3\ t\ \tan\alpha\,\underline{k}$ වේ. මෙහි $\frac{-\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ වේ.

(i) $\underline{T}$, ඒකක ස්පර්ශක දෛශිකය,

(ii) $\underline{N}$ ප්‍රධාන අභිලම්බය සහ වක්‍රතාව,

(iii) $\underline{B}$ අපර අභිලම්බය සහ ව්‍යාවර්ථය සොයන්න.

(05) (a) Let $\underline{f}(t), \underline{g}(t), \underline{h}(t)$ be three differentiable vector functions of t. Show that

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\underline{f}(t)\times\underline{g}(t)\right)\cdot\underline{h}(t)\right]=\left[\frac{d\underline{f}(t)}{dt}\times\underline{g}(t)\right]\cdot\underline{h}(t)+\left[\underline{f}(t)\times\frac{d\underline{g}(t)}{dt}\right]\cdot\underline{h}(t)+\left(\underline{f}(t)\times\underline{g}(t)\right)\cdot\frac{d\underline{h}(t)}{dt}$$

(b) Let $\underline{f}(t)$ be differentiable for each $t\in\mathbb{R}$ and let $\underline{c}$ be an arbitrary constant vector. Show that

(i) $\int \underline{f}(t)\times\frac{d^2\underline{f}(t)}{dt^2}dt=\underline{f}(t)\times\frac{d\underline{f}(t)}{dt}+\underline{c}.$

(ii) Let $\underline{r}(t)=t^2\,\underline{i}+pt\,\underline{j}+t\,\underline{k},\ p<0$ and $|\underline{r}(1)|=3$. Find the value of p and evaluate $\int_0^1 \underline{r}(t)\times\frac{d^2\underline{r}(t)}{dt^2}dt=\underline{j}+\underline{k}$.

(c) The acceleration of a particle at time t is given by $\underline{a}(t)=-\cos t\,\underline{i}-\sin t\,\underline{j}$. Initially it was moving with velocity $\underline{v}(0)=\underline{j}+\underline{k}$ from the point with position vector $\underline{r}(0)=\underline{i}$. Find the position of the particle at time t.

(06) (a) A curve C is defined by parametric equations

$$x=x(s),\ y=y(s),\ z=z(s)$$

where, s is the arc length of C measured from a fixed point on C. If $\underline{r}$ is the position vector of any point P on C, show that $\frac{d\underline{r}}{ds}$ is a unit tangent vector to C at P.

(b) A space curve is given by $\underline{r}(t)=3\cos t\,\underline{i}+3\sin t\,\underline{j}+3t\tan\alpha\,\underline{k}$, where t is a parameter and $\frac{-\pi}{2}<\alpha<\frac{-\pi}{2}$. Find

(i) the unit tangent vector $\underline{T}$,

(ii) the principal normal vector $\underline{N}$ and curvature,

(iii) the unit binomial vector $\underline{B}$ and torsion.