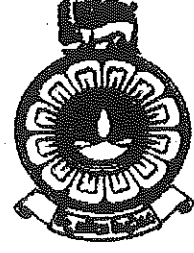


இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்

இயற்கை விஞ்ஞானங்கள் பீடம்

விஞ்ஞானமாணி / கல்விமாணி பட்டப்பாடநெறி

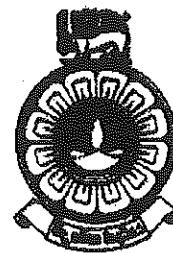


திணைக்களம்	: கணிதம்
மட்டம்	: 03
பரீட்சையின் பெயர்	: இறுதிப் பரீட்சை
கற்கை தலைப்பு மற்றும் - குறியீடு	: காவி அட்சர கணிதம் - ADU3300
கல்வி ஆண்டு	: 2021/22
திகதி	: 15.10.2022
நேரம்	: பி.ப 1.30 இலிருந்து பி.ப 3.30 வரை
காலம்	: 02 மணித்தியாலங்கள்.

பொது அறிவுறுத்தல்கள்

1. வினாக்களுக்கு விடையளிக்க முன் அனைத்து அறிவுறுத்தல்களையும் நன்றாக வாசிக்கவும்.
2. இவ் வினாப்பத்திரமானது 06 வினாக்களை 03 பக்கங்களில் கொண்டுள்ளது.
3. ஏதேனும் 04 வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக. எல்லா வினாக்களும் சமமான புள்ளிகளை கொண்டுள்ளன.
4. ஒவ்வொரு வினாக்குமான விடை ஒரு புதிய பக்கத்தில் ஆரம்பிக்கப்பட வேண்டும்.
5. தேவையான இடங்களில் முழுமையாகவும் தெளிவாகவும் பெயரிடப்பட்ட வரைபடங்களை வரையவும்
6. பரீட்சைக் குற்றமாக கருதப்படும் எந்தவொரு செயலிலும் ஈடுபடுவது தண்டனைக்கு வழிவகுக்கும்.
7. வினாக்களுக்கு விடையளிக்கையில் நீல அல்லது கறுப்பு வண்ண மை ஒன்றைப் பயன்படுத்தவும்
8. உங்களுடைய சுட்டெண்ணை உங்களுடைய விடைத்தாளில் தெளிவாக குறிப்பிடவும்.

The Open University of Sri Lanka
Faculty of Natural Sciences
B.Sc. / B. Ed. Degree Programme



Department	: Mathematics
Level	: 03
Name of the Examination	: Final Examination
Course Title and - Course Code	: Vector Algebra – ADU3300
Academic Year	: 2021/22
Date	: 15.10.2022
Time	: 1.30 p.m. To 3.30 p.m.
Duration	: Two Hours.

General Instructions

1. Read all instructions carefully before answering the questions.
2. This question paper consists of (6) questions in (3) pages.
3. Answer any (4) questions only. All questions carry equal marks.
4. Answer for each question should commence from a new page.
5. Draw fully and clearly labelled diagrams where necessary.
6. Involvement in any activity that is considered as an exam offense will lead to punishment.
7. Use blue or black ink to answer the questions.
8. Clearly state your index number in your answer script.

(01) (a) முக்கோணி ABC இல், $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{BC} = \underline{v}$ மற்றும் $\overline{CA} = \underline{w}$ என்க. $\underline{u} \times \underline{v} = \underline{v} \times \underline{w} = \underline{w} \times \underline{u}$ எனக் காட்டுக மற்றும் இதிலிருந்து முக்கோணி ABC இற்கு சைன் விதியை நிறுவுக.

(b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$ மற்றும் $x-3 = \frac{y-k}{2} = z$ என்னும் இரண்டு கோடுகள் இடைவெட்டும் எனின்,

(i) காவி வடிவில் இரண்டு கோடுகளினதும் சமன்பாட்டை எழுதுக.

(ii) k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க,

(iii) இதிலிருந்து இவ்விரண்டு கோடுகளையும் கொண்டிருக்கும் தளத்தின் தெக்காட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(c) $P_1(2, -1, 1)$, $P_2(3, 2, -1)$ மற்றும் $P_3(-1, 3, 2)$ என்னும் புள்ளிகளால் துணியப்பட்ட தளத்தின் சமன்பாடு ஒன்றினைக் காண்க.

(d) உற்பத்தி O தொடர்பாக புள்ளிகள் P_1 மற்றும் P_2 வின் தானக் காவிகள் $\underline{r}_1, \underline{r}_2$ மற்றும் $\overline{OP}_1, \overline{OP}_2$ இன் திசைக் கோசைன்கள் முறையே (l_1, m_1, n_1) மற்றும் (l_2, m_2, n_2) ஆகும்.

(i) $\overline{P_1P_2} = (r_2l_2 - r_1l_1)\underline{i} + (r_2m_2 - r_1m_1)\underline{j} + (r_2n_2 - r_1n_1)\underline{k}$ எனக் காட்டுக, இங்கு $\underline{r}_1 = |\underline{r}_1|$ மற்றும் $\underline{r}_2 = |\underline{r}_2|$ ஆகும்.

(ii) \overline{OP}_1 மற்றும் \overline{OP}_2 இற்கு இடையிலான கோணம் θ எனின், $\cos \theta = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$ எனக் காட்டுக.

(02) (a) ஒரு வலக்கை தெக்காட்டினுள் கூற்றுத் தொகுதியின் உற்பத்தி O குறித்து புள்ளிகள் A, B மற்றும் C என்பவற்றின் தானக் காவிகள் $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$, $\underline{b} = \underline{i}$ மற்றும் $\underline{c} = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$ என்க. AN என்னும் கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக, இங்கு N ஆனது BC இற்கு AN செங்குத்தாக இருக்குமாறு கோடு BC இன் மேலுள்ள புள்ளியாகும்.

(b) $x + y + z = 21$ என்னும் தளத்திற்கும் $x - 1 = y + 2 = 2z + 3$ என்னும் கோட்டிற்கும்

இடையே உள்ள கோணத்தினைக் காண்க.

(c) ஓராயக் கோடுகள் $x - 6 = \frac{2 - y}{2} = \frac{z - 2}{2}$ மற்றும் $\frac{x + 4}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z + 1}{-2}$ என்பவற்றுக்கு இடையே

உள்ள குறுகிய தூரத்தினைக் காண்க.

- (01) (a) In a triangle ABC , let $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{BC} = \underline{v}$ and $\overline{CA} = \underline{w}$. Show that

$$\underline{u} \times \underline{v} = \underline{v} \times \underline{w} = \underline{w} \times \underline{u} \text{ and hence prove the Sin Rule for the triangle } ABC.$$

- (b) If the two lines $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$ and $x-3 = \frac{y-k}{2} = z$ intersect, then

- (i) Write down the equation of the two lines in vector form.
(ii) find the value of k ,
(iii) hence find the Cartesian equation of the plane containing these two lines.

- (c) Find a vector equation for the plane determined by the points $P_1(2, -1, 1)$,

$$P_2(3, 2, -1) \text{ and } P_3(-1, 3, 2).$$

- (d) The position vectors of the points P_1 and P_2 relative to an origin O are $\underline{r}_1, \underline{r}_2$ and the direction cosines of $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}$ are (l_1, m_1, n_1) and (l_2, m_2, n_2) respectively.

- (i) Show that $\overline{P_1P_2} = (r_2l_2 - r_1l_1)\underline{i} + (r_2m_2 - r_1m_1)\underline{j} + (r_2n_2 - r_1n_1)\underline{k}$
where $r_1 = |\underline{r}_1|$ and $r_2 = |\underline{r}_2|$.

- (ii) If θ is the angle between $\overline{OP_1}$ and $\overline{OP_2}$, show that

$$\cos \theta = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2.$$

- (02) (a) Let $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$, $\underline{b} = \underline{i}$ and $\underline{c} = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$ be the position of vectors of the points A, B and C with respect to the origin O of a right-handed Cartesian co-ordinate system. Write down the equation of the line AN , where the point N is on the line BC such that AN is perpendicular to BC .

- (b) Find the angle between the plane $x + y + z = 21$ and the line

$$x-1 = y+2 = 2z+3.$$

- (c) Find the shortest distance between the skew lines $x-6 = \frac{2-y}{2} = \frac{z-2}{2}$

$$\text{and } \frac{x+4}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-2}.$$

- (d) Show that the curve

$$\underline{r} = \left(1 - \frac{16 \cos \theta}{\sqrt{14}} + \frac{8 \sin \theta}{\sqrt{5}}\right)\underline{i} + \frac{24 \cos \theta}{\sqrt{14}}\underline{j} + \left(2 + \frac{8 \cos \theta}{\sqrt{14}} + \frac{16 \sin \theta}{\sqrt{5}}\right)\underline{k}$$

is a circle. Find its centre and the radius.

(d) $r = \left(1 - \frac{16 \cos \theta}{\sqrt{14}} + \frac{8 \sin \theta}{\sqrt{5}}\right) \underline{i} + \frac{24 \cos \theta}{\sqrt{14}} \underline{j} + \left(2 + \frac{8 \cos \theta}{\sqrt{14}} + \frac{16 \sin \theta}{\sqrt{5}}\right) \underline{k}$ என்னும் வளையி ஒரு வட்டம் எனக் காட்டுக. ஆதன் மையம் மற்றும் ஆரையைக் காண்க.

(03) (a) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ மற்றும் \underline{d} காவிகளாகும் மற்றும் வழமையான குறியீட்டுடன் $[\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}] = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$ என்பது பொருந்தும் என்க. பின்வரும் முடிவுகளை நிறுவுக.

$$(i) (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{b} \cdot \underline{c})(\underline{a} \cdot \underline{d})$$

உய்த்தறிக,

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) + (\underline{b} \times \underline{c}) \cdot (\underline{a} \times \underline{d}) + (\underline{c} \times \underline{a}) \cdot (\underline{b} \times \underline{d}) = 0,$$

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot [(\underline{b} \times \underline{c}) \times (\underline{c} \times \underline{a})] = [\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}]^2.$$

(b) \underline{x} மற்றும் \underline{y} இற்கான பின்வரும் ஒருங்கமை காவிச் சமன்பாட்டை தீர்க்க.

$$\underline{x} + \underline{y} = \underline{a}, \quad \underline{x} \times \underline{y} = \underline{b}, \quad \underline{x} \cdot \underline{a} = 1, \text{ இங்கு } \underline{a} \text{ மற்றும் } \underline{b} \text{ தரப்பட்ட காவிகள் ஆகும்.}$$

(04) (a) காவி பெறுமானச் சார்புகள் $\underline{G}, \underline{H}$ மற்றும் \underline{F} ஆகியவை $\underline{G}(t) = 2t^2 \underline{i} - e^t \underline{j} + \frac{1}{e} \underline{k}$, $\underline{H}(t) = (1-t) \underline{i} + 2t \underline{j}$ மற்றும் $\underline{F}(t) = e^{-t} \cos t \underline{i} + \cos t \underline{k}$ ஆல் தரப்படுகின்றன என்க.

$$B(t) \cos t = \underline{G}(t) \cdot [\underline{H}(t) \times \underline{F}(t)] \text{ என ஆகுமாறு சார்பு } B \text{ இதைத் துணிக.}$$

இதிலிருந்து, $t = 1$ ஆக இருக்கும் போது $B(t)$ ஐ மதிப்பிடுக.

(b) காவி பெறுமானச் சார்பு $\underline{F}(t) = \frac{t-2}{t^2-4} \underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2-t}} \underline{j} + \ln(9-t^2) \underline{k}$ இன் ஆட்சியைக் காண்க.

(c) வெளியில் நகரும் துணிக்கை ஒன்றின் தானக் காவி t நேரத்தில் $\operatorname{cosec}^{-1}(t) \underline{i} + \frac{t}{\log(1+t)} \underline{j} + t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \underline{k}$ ஆகும். $t \rightarrow \infty$ ஐ ஆனுகும் போது இத் துணிக்கையின் தானக் காவியை காண்க.

(d) ஒரு நேர் கோடு l ஆனது காவி \underline{a} இற்கு சமாந்தரமாகவும் மற்றும் புள்ளி B வழியாகவும் செல்கிறது, அதன் தானக் காவி \underline{b} ஆகும். புள்ளி C ஆனது \underline{c} என்னும் தானக் காவியை

- (03) (a) Let $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ and \underline{d} be vectors and as usual the notation $[\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}] = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$ applies. Prove the following results.

$$(i) \quad (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{b} \cdot \underline{c})(\underline{a} \cdot \underline{d})$$

Deduce that,

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) + (\underline{b} \times \underline{c}) \cdot (\underline{a} \times \underline{d}) + (\underline{c} \times \underline{a}) \cdot (\underline{b} \times \underline{d}) = 0,$$

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot [(\underline{b} \times \underline{c}) \times (\underline{c} \times \underline{a})] = [\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}]^2.$$

- (b) Solve the following simultaneous vector equation for \underline{x} and \underline{y}
 $\underline{x} + \underline{y} = \underline{a}$, $\underline{x} \times \underline{y} = \underline{b}$, $\underline{x} \cdot \underline{a} = 1$ where \underline{a} and \underline{b} are given vectors.

- (04) (a) Let the vector valued functions \underline{G} , \underline{H} and \underline{F} be given by

$$\underline{G}(t) = 2t^2 \underline{i} - e^t \underline{j} + \frac{1}{e^t} \underline{k}, \quad \underline{H}(t) = (1-t) \underline{i} + 2t \underline{j} \quad \text{and}$$

$$\underline{F}(t) = e^{-t} \cos t \underline{i} + \cos t \underline{k}.$$

Determine a function B such that $B(t) \cos t = \underline{G}(t) \cdot [\underline{H}(t) \times \underline{F}(t)]$.

Hence, evaluate $B(t)$ when $t = 1$.

- (b) Find the domain of the vector valued function

$$\underline{F}(t) = \frac{t-2}{t^2-4} \underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2-t}} \underline{j} + \ln(9-t^2) \underline{k}.$$

- (c) The position vector at time t of a particle moving in space is

$\cos e^{-1}(t) \underline{i} + \frac{t}{\log(1+t)} \underline{j} + t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \underline{k}$. Find the position vector of this particle as $t \rightarrow \infty$.

- (d) A straight line l is parallel to a vector \underline{a} and passes through a point B ,

whose position vector is \underline{b} . The point C has position vector \underline{c} and \underline{p} is the

position vector of the foot of the perpendicular drawn from C to l .

Prove that $\underline{p} = \underline{b} + \frac{(\underline{c} - \underline{b}) \cdot \underline{a}}{|\underline{a}|^2} \underline{a}$.

கொண்டுள்ளது மற்றும் \underline{p} என்பது C இலிருந்து l இற்கு செங்குத்திடைவிலிருந்து வரையப்பட்ட தானக் காவி ஆகும்.

$$\underline{p} = \underline{b} + \frac{(c-b) \cdot \underline{a}}{|\underline{a}|^2} \underline{a} \text{ என நிறுவுக.}$$

(05) (a) $\underline{f}(t)$, $\underline{g}(t)$, $\underline{h}(t)$ என்பன t இன் மூன்று வகையீட்டு காவி சார்புகளாக இருக்கும் என்க.

$$\frac{d}{dt}[(\underline{f}(t) \times \underline{g}(t)) \cdot \underline{h}(t)] = \left[\frac{d\underline{f}(t)}{dt} \times \underline{g}(t) \right] \cdot \underline{h}(t) + \left[\underline{f}(t) \times \frac{d\underline{g}(t)}{dt} \right] \cdot \underline{h}(t) + (\underline{f}(t) \times \underline{g}(t)) \cdot \frac{d\underline{h}(t)}{dt} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

(b) ஒவ்வொரு $t \in \mathbb{R}$ இற்கும் $\underline{f}(t)$ வகையிடத் தக்கது என்க மற்றும் \underline{c} ஒரு எதேச்சை ஒருமைக் காவி என்க.

$$(i) \int \underline{f}(t) \times \frac{d^2 \underline{f}(t)}{dt^2} dt = \underline{f}(t) \times \frac{d\underline{f}(t)}{dt} + \underline{c} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

(ii) $\underline{r}(t) = t^2 \underline{i} + pt \underline{j} + t \underline{k}$, $p < 0$ மற்றும் $|\underline{r}(1)| = 3$ என்க. p இன் பெறுமானத்தைக்

$$\text{காண்க மற்றும் } \int_0^1 \underline{r}(t) \times \frac{d^2 \underline{r}(t)}{dt^2} dt = \underline{j} + \underline{k} \text{ ஐ மதிப்பிடுக.}$$

(c) t நேரத்தில் ஒரு துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் $\underline{a}(t) = -\cos t \underline{i} - \sin t \underline{j}$ இனால் தரப்படுகிறது. ஆரம்பத்தில் அது தானக் காவி $\underline{r}(0) = \underline{i}$ ஐ உடைய புள்ளியிலிருந்து $\underline{v}(0) = \underline{j} + \underline{k}$ வேகத்துடன் நகர்கிறது. t நேரத்தில் துணிக்கையின் நிலையை காண்க.

(06) (a) ஒரு வளையி C $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ ஆகிய பரமானச் சமன்பாடுகளால் வரையறுக்கப்படுகின்றது. இங்கு, s என்பது C இன் மீது ஒரு நிலையான புள்ளியில் இருந்து அளவிடப்படும் C இன் வில் நீளம் ஆகும்.

C இன் மீது உள்ள யதாயினும் புள்ளி P இன் தானக் காவி \underline{r} எனின், $\frac{d\underline{r}}{ds}$ என்பது P இல்

C இற்கான ஒரு அலகு தொடலிக் காவி எனக் காட்டுக.

(b) ஒரு வெளி வளையி $\underline{r}(t) = 3 \cos t \underline{i} + 3 \sin t \underline{j} + 3t \tan \alpha \underline{k}$ என்பதால் தரப்படுகின்றது. இங்கு

t என்பது ஒரு பரமானம் மற்றும் $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ஆகும். கணிக்க.

(i) அலகுத் தொடலிக் காவி \underline{T} ,

(ii) அலகுத் தலைமைச் செவ்வன் காவி \underline{N} மற்றும் வளைவு,

(iii) அலகுத் இருமைச்செவ்வன் காவி \underline{B} மற்றும் முறுக்கல், என்பவற்றைக் காண்க.

(05) (a) Let $\underline{f}(t)$, $\underline{g}(t)$, $\underline{h}(t)$ be three differentiable vector functions of t .

Show that

$$\frac{d}{dt}[(\underline{f}(t) \times \underline{g}(t)) \cdot \underline{h}(t)] = \left[\frac{d\underline{f}(t)}{dt} \times \underline{g}(t) \right] \cdot \underline{h}(t) + \left[\underline{f}(t) \times \frac{d\underline{g}(t)}{dt} \right] \cdot \underline{h}(t) + (\underline{f}(t) \times \underline{g}(t)) \cdot \frac{d\underline{h}(t)}{dt}$$

(b) Let $\underline{f}(t)$ be differentiable for each $t \in \mathbb{R}$ and let \underline{c} be an arbitrary

constant vector. Show that

(i)
$$\int \underline{f}(t) \times \frac{d^2 \underline{f}(t)}{dt^2} dt = \underline{f}(t) \times \frac{d\underline{f}(t)}{dt} + \underline{c}.$$

(ii) Let $\underline{r}(t) = t^2 \underline{i} + pt \underline{j} + t \underline{k}$, $p < 0$ and $|\underline{r}(1)| = 3$. Find the value of p and evaluate $\int_0^1 \underline{r}(t) \times \frac{d^2 \underline{r}(t)}{dt^2} dt = \underline{j} + \underline{k}$.

(c) The acceleration of a particle at time t is given by $\underline{a}(t) = -\cos t \underline{i} - \sin t \underline{j}$. Initially it was moving with velocity $\underline{v}(0) = \underline{j} + \underline{k}$ from the point with position vector $\underline{r}(0) = \underline{i}$. Find the position of the particle at time t .

(06) (a) A curve C is defined by parametric equations

$$x = x(s), y = y(s), z = z(s)$$

where, s is the arc length of C measured from a fixed point on C .

If \underline{r} is the position vector of any point P on C , show that $\frac{d\underline{r}}{ds}$ is a unit tangent vector to C at P .

(b) A space curve is given by $\underline{r}(t) = 3 \cos t \underline{i} + 3 \sin t \underline{j} + 3t \tan \alpha \underline{k}$,

where t is a parameter and $\frac{-\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Find

- (i) the unit tangent vector \underline{T} ,
- (ii) the principal normal vector \underline{N} and curvature,
- (iii) the unit binomial vector \underline{B} and torsion.