The Open University of Sri Lanka

B.Sc/B.Ed. DEGREE, CONTINUING EDUCATION PROGRAMME

CAT2 - Online Test 2021/2022

Level 03 Pure Mathematics

PEU3202– Vector Spaces

Duration: - One hour

Date: - 29-01-2022 **Time: 6.30 p.m. -7.30 p.m.**

Answer all questions

1.

(a) Let }. Note that M is a vector space over the field under the usual matrix addition and scalar multiplication.

Let the mapping be defined by .

(i) Show that T is a linear transformation.

(ii) Determine whether the following sets are invariant subspaces of the vector space over the field under T

I.

II.

(b)

(i) Define an inner product space.

(ii) Let V be an inner product space over a field F. Prove that for and

(iii) et where .

Define . Is an inner product on? Justify your answer.

2.

(a) Let be any two vectors of a Euclidian Space.

(i) Prove that

(ii) Define the angle between u and v

(iii) Find the angle between the vectors (2,2,2) and (0,1,1) in E^3, the usual Euclidean three space.

(c) Show that the three vectors $u_1 = (2,2,2)$, $u_2 = (0,1,1)$ and $u_3 = (0,0,1)$ form a basis for E^3, the usual Euclidean three space. Construct an orthogonal basis for E^3 out of $\{u_1, u_2, u_3\}$ using the Gram–Schmidt process.

ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය

විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව

CAT2 - Online Test 2021/2022

ශුද්ධ ගණිතය - තුන්වන මට්ටම

PEU3202– දෛශික අවකාශ

කාලය පැය එකයි.

දිනය : - 29-01-2023 **වේලාව : 6.30 a.m. -7.30 a.m.**

සියලුම ප්‍රශ්න වලට පිළිතුරු සපයන්න.

1.

(a) $M \quad \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a,b,c,d \in \mathbb{R} \}$ ලෙස ගනිමු. . M යනු සුපුරුදු න්‍යාස එකතුව සහ අදිශ ගුණිතය යටතේ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අ අවකාශයකි.. $T : M \to M$ යනු

$T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) \quad \begin{bmatrix} a-b & b \\ c-d & c \end{bmatrix}$ මඟින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ. .

(i) T ඒකජ පරිනාමණයක් බව පෙන්වන්න.

(ii) පහත දැක්වෙන කුලක අතරින් කවරක් T යටතේ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ M දෛශික අවකාශයේ අවිචලක උප අවකාශයක් වේද යන්න සොයන්න.

I. $W \quad \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a.b \in \mathbb{R} \right\}$

II. $W \quad \{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} | a,b \in \mathbb{R} \}$

(b)

(i) අන්තර් ගුණිත අවකාශය අර්ථ දක්වන්න.

(ii) V යනු F ක්ෂේත්‍රය මත අන්තර් ගුණිත අවකාශයකි. $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathrm{V}$ සහ $a, b \in F$ සඳහා $< ax_1 + bx_2, y_1 + y_2 > = a < x_1, y_1 > +a < x_1, y_2 > +b < x_2, y_1 > +b < x_2, y_2 >$ බව සාධනය කරන්න.

(iii) $u \quad (x_1, x_2, x_3)$, $v \quad (y_1, y_2, y_3)$ ලෙස ගනිමු ; $u, v \in \mathbb{R}^3$ වේ. $< u, v > \quad {x_1}^2{y_1}^2 + {x_2}^2{y_2}^2 + {x_3}^2{y_3}^2$ මඟින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ. $< u, v >$ යනු $\mathbb{R}^3$ මත අන්තර් ගුණිත අවකාශයක්ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

2.

$\underline{u}$ සහ $\underline{v}$ යනු යුක්ලීඩීය දෛශික අවකාශයෙහි අවකාශයෙහි දෛශික දෙකකි.

(i) $u + v \ \leq \ u \ + \ v||$ බව සාධනය කරන්න.

(ii) $\underline{u}$ සහ $\underline{v}$ අතර කෝණය නිර්වචනය කරන්න.

(iii) E^3 යන සුපුරුදු යුක්ලීඩීය දෛශික අවකාශයෙහි දෛශික $(2,2,2)$ සහ $(0,1,1)$ අතර කෝණය සොයන්න.

(b) $u_1 = (2,2,2)$, $u_2 = (0,1,1)$ සහ $u_3 = (0,0,1)$ යන දෛශික E^3 සුපුරුදු යුක්ලීඩීය දෛශික අවකාශයෙහි පදනමක් බව පෙන්වන්න. Gram–Schmidt ක්‍රියාවලිය මගින් $\{u_1, u_2, u_3\}$, E^3 හි ප්‍රලම්බ පදනමක් බවට පරිනාමණය කරන්න.

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்

விஞ்ஞான இளமாணி/ கல்வி இளமாணி பட்டப்படிப்பு, தொடர் கல்வி கற்கைநெறி

CAT2 – இணையவழி பரீட்சை 2021/2022

மட்டம் 03 தூய கணிதம்

PEU3202 – காவி வெளிகள்

காலம்: - ஒரு மணித்தியாலம்

திகதி: - 29-01-2023 **Time: 6.30 a.m. -7.30 a.m.**

அனைத்து வினாக்களுக்கும் விடையளிக்குக

1.

(a) $M = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$ என்க. வழமையான தாயக் கூட்டல் மற்றும் எண்ணி பெருக்கத்துக்கு அமைவாக புலம் $\mathbb{R}$ இன் மேல் M ஒரு காவி வெளி என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. $T : M \to M$ என்னும் படமாக்கமானது $T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a-b & b \\ c-d & c \end{bmatrix}$ இனால் வரையறுக்கப்படுகிறது என்க.

(i) T ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றம் எனக் காட்டுக.

(ii) பின்வரும் தொடைகள் புலம் $\mathbb{R}$ இன் மேல் T இன் கீழ் காவிவெளி M இல் மாற்றமில் உபவெளிகளா எனத் துணிக.

I. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a. b \in \mathbb{R} \right\}$

II. $W = \{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \}$

(b)

(i) உட்பெருக்க வெளி ஒன்றை வரையறுக்க.

(ii) F என்னும் ஒரு புலத்தின் மேல் V என்பது ஒரு உட்பெருக்க வெளி என்க. $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathrm{V}$ மற்றும் $a, b \in F$ இற்கு
$< ax_1 + bx_2, y_1 + y_2 > = a < x_1, y_1 > +a < x_1, y_2 > +b < x_2, y_1 > +b < x_2, y_2 >$
என நிறுவுக.

(iii) $u = (x_1, x_2, x_3),\ v = (y_1, y_2, y_3)$ என்க, இங்கு $u, v \in \mathbb{R}^3$ ஆகும்.
$< u, v > = {x_1}^2{y_1}^2 + {x_2}^2{y_2}^2 + {x_3}^2{y_3}^2$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $< u, v >$ என்பது $\mathbb{R}^3$ இன் ஒரு உட்பெருக்கமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

2.

(a) u மற்றும் v என்பன ஊக்கிட்டு வெளியொன்றிலுள்ள யாதாயினும் இரண்டு காவிகள் என்க.

(i) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ என நிறுவுக.

(ii) u மற்றும் v என்பவற்றிக்கு இடையிலான கோணத்தை வரையறுக்க.

(iii) வழமையான ஊக்கிட்டு மூவெளி E^3 இல் காவிகள் $(2,2,2)$ மற்றும் $(0,1,1)$ என்பவற்றிக்கு இடையிலான கோணத்தைக் காண்க.

(c) $u_1 = (2,2,2)$, $u_2 = (0,1,1)$ மற்றும் $u_3 = (0,0,1)$ என்பன வழமையான ஊக்கிட்டு மூவெளி E^3 இற்கான ஒரு அடிமூலத்தை உருவாக்கும் எனக் காட்டுக. கிராம்சிமிற்றர் செயற்பாட்டை பயன்படுத்தி $\{u_1, u_2, u_3\}$ இதிலிருந்து E^3 இற்கான நிமிர்செவ்வனடி மூலம் ஒன்றை அமைக்க.