

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்

விஞ்ஞானமாணி/கல்விமாணி பட்டப்பாடநெறி

தூய கணிதம் – மட்டம் 03

PEU3300 – கணித தர்க்கவியலும் கணித நிறுவல்களும்

இறுதிப் பரீட்சை - 2023/2024



திகதி: 17.10.2023

நேரம்: முய. 09.30 – முய. 11.30

பொது அறிவுறுத்தல்கள்

- இவ் வினாப்பத்திரமானது பகுதி A மற்றும் பகுதி B என இரண்டு பகுதிகளைக் கொண்டுள்ளது. பகுதி A கட்டாயமானது மற்றும் இது ஐந்து கட்டமைக்கப்பட்ட கட்டுரை வினாக்களைக் கொண்டுள்ளது மற்றும் புள்ளிகள் 100 ஆகும்.
- பகுதி B யானது ஐந்து கட்டுரை வகையான வினாக்களைக் கொண்டுள்ளது அவற்றில் மூன்று வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்கவும்.
- பகுதி B இல் ஒவ்வொரு வினாவுக்குமான புள்ளிகள் 100 ஆகும்.
- இவ் வினாத்தாள் 03 பக்கங்களை கொண்டுள்ளது.

பகுதி A

1. அனைத்து வினாக்களுக்கும் விடை தருக.

- (a) p, q, r என்பன முறையே “1 ஒரு முதன்மை எண்ணாகும்”, “6 ஒரு நிறை வர்க்கமாகும்” மற்றும் “21 ஆனது 3 ஆல் பிரிபடக்கூடியது” என்னும் கூற்றுக்களை குறிக்கின்றன. “1 ஒரு முதன்மை எண்ணாகும் மற்றும் 21 ஆனது 3 ஆல் பிரிபடாது எனின், 1 ஒரு முதன்மை எண் அல்ல அல்லது 6 ஒரு நிறை வர்க்கமாகும்” என்னும் கூற்றை குறியீட்டில் கீழே எழுதுக.
- (b) “ $\forall x \in R, \exists y \in R, P(x, y)$ ” என்னும் கூற்றைக் கருதுக, இங்கு $P(x, y)$ என்பது $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 > 0$ வை குறிக்கிறது. கூற்றை சொற்களில் வெளிப்படுத்துக.
- (c) $n \in Z$ என்க. அதன் மறுப்பு “ $2n+1$ ஒற்றையாகும் மற்றும் $4n-3$ ஒற்றையாகும்” என ஆகுமாறு உள்ள நிபந்தனை கூற்றை கீழே எழுதுக.
- (d) $P(x): x \geq 3$ மற்றும் $Q(x): 4x - 1 > 12$ என்பன ஆட்சி $S = \{0, 2, 3, 4, 6\}$ மீதுள்ள கூற்றுக்கள் என்க. $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ என்னும் இரு-நிபந்தனையுள்ள கூற்று உண்மையாக இருக்கும் $x \in S$ இன் அனைத்து பெருமானங்களையும் துணிக.
- (e) “ $3x + 4y$ மற்றும் $4x + 5y$ இரண்டும் இரட்டை எனின், x மற்றும் y இரண்டும் இரட்டை ஆகும்” என்பதன் எதிர்வைப்பு கூற்றை எழுதுக.

பகுதி B

மூன்று வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

2. (a) $P(n): 3|(4n - 3)$ என்க, இங்கு n ஒரு முழுவெண் ஆகும். பின்வரும் கூற்றுக்கள் உண்மையா என்பதை துணிக.

(i) $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n)$

(ii) $\exists n \in \mathbb{Z}, P(n)$

(b) $Q(x, y): x + y$ முதன்மையானது என்னும் கூற்றைக் கருதுக, இங்கு x இன் ஆட்சி $S = \{3, 5, 7\}$ மற்றும் y இன் ஆட்சி $T = \{2, 6, 8, 12\}$ ஆகும்.

நியாயங்களை வழங்குவதன் மூலம் பின்வரும் கூற்றுக்களின் உண்மை பெறுமதிகளை துணிக.

(i) $Q(x, y)$ என ஆகுமாறு ஒவ்வொரு $x \in S$ இற்கும், ஒரு $y \in T$ உண்டு.

(ii) ஒவ்வொரு $y \in T$ இற்கும், $Q(x, y)$ என ஆகுமாறு ஒரு $x \in S$ உண்டு.

(iii) $Q(x, y)$ என ஆகுமாறு ஒவ்வொரு $x \in S$ இற்கும், ஒவ்வொரு $y \in T$ உண்டு.

3. பின்வரும் கூற்றுக்கள் ஒவ்வொன்றையும் சரி அல்லது பிழை என நிறுவுக.

(a) $\sqrt{2} - 1$ விகிதமுறாது அல்லது $\sqrt{2} + 1$ விகிதமுறாது.

(b) ஒவ்வொரு மறை மெய் எண் x இற்கும், $x^2 + 1 > 0$ ஆகும்.

(c) $n \in \mathbb{Z}$ என்க. $7n + 3$ ஒற்றை எனின், n இரட்டை ஆகும்.

(d) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ என ஆகுமாறு ஒரு மெய் எண் x இற்கு, ஒரு மெய் எண் y உண்டு.

(e) ஒவ்வொரு $x \in \mathbb{R}$ இற்கும், $-5 \leq x < 4$ எனின் $|x| \leq 4$ ஆகும்.

4. (a) பின்வருவன ஒரு முடிவுக்கான நிறுவல் முயற்சி:

“ a என்பது இரட்டை மற்றும் b ஒரு முழுவெண் எனக் கொள்க. எனவே, சில முழுவெண் n இற்கு $a = 2n$ ஆகும். இதனால், $ab^2 = (2n)b^2 = 2(nb^2)$ ஆகும். nb^2 ஒரு முழுவெண் என்பதால், ab^2 இரட்டை ஆகும்.”

(i) மேலுள்ள நிறுவலின் எடுகோள்கள் மற்றும் முடிவு என்பவற்றை கீழே எழுதுக.

(ii) என்ன கூற்று நிறுவப்பட்டிருக்கின்றது?

(iii) எந்த வகையான நிறுவல் முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது?

(iv) இதே முடிவுக்கான வேறுபட்ட எடுகோள்களை கீழே எழுதுக. உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

SECTION B

Answer THREE questions ONLY.

2. (a) Let $P(n): 3|(4n - 3)$ where n is an integer. Determine whether the following statements are true.

(i) $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n)$

(ii) $\exists n \in \mathbb{Z}, P(n)$

(b) Consider the statement $Q(x, y): x + y$ is prime, where the domain of x is $S = \{3, 5, 7\}$ and the domain of y is $T = \{2, 6, 8, 12\}$.

Determine the truth values of the following statements by providing justifications.

(i) For each $x \in S$, there exists a $y \in T$ such that $Q(x, y)$.

(ii) There exists a $x \in S$ such that for each $y \in T$, $Q(x, y)$.

(iii) For each $x \in S$, for each $y \in T$ such that $Q(x, y)$.

3. Prove or disprove each of the following statements.

(a) $\sqrt{2} - 1$ is irrational or $\sqrt{2} + 1$ is irrational.

(b) For each negative real number x , $x^2 + 1 > 0$.

(c) Let $n \in \mathbb{Z}$. If $7n + 3$ is odd, then n is even.

(d) There exists a real number x , there exists a real number y such that $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

(e) For each $x \in \mathbb{R}$, if $-5 \leq x < 4$ then $|x| \leq 4$.

4. (a) The following is an attempted proof of a result:

“Suppose that a is even and b is an integer. Then $a = 2n$ for some integer n . Thus, $ab^2 = (2n)b^2 = 2(nb^2)$. Since nb^2 is an integer, ab^2 is even.”

(i) Write down the assumptions and conclusion of the above proof.

(ii) What statement is being proved?

(iii) What type of proof method is used?

(iv) Write down different assumptions for the same conclusion. Justify your answer.

(b) (i) $n \in \mathbb{Z}$ என்க. n^3 இரட்டை எனின், n இரட்டை என நிறுவுக.

(ii) பகுதி (i) ஐ பயன்படுத்தி, n ஒரு ஒற்றை முழுவெண் எனின், $3n^6 + 11$ இரட்டை என நிறுவுக.

5. பின்வரும் கூற்றுக்கள் ஒவ்வொன்றையும் சரி அல்லது பிழை என நிறுவுக.

(a) $ab < 0$ மற்றும் $a + b \geq 0$ என இரண்டும் ஆகமாறு ஒரு முழுவெண் a இற்கு, ஒரு முழுவெண் b உண்டு.

(b) $ab < 0$ மற்றும் $a + b \geq 0$ என இரண்டும் ஆகமாறு ஒவ்வொரு பூச்சியமல்லா முழுவெண் a இற்கும், ஒரு பூச்சியமல்லா முழுவெண் b உண்டு.

(c) ஒவ்வொரு முழுவெண் b இற்கும், $ab < 0$ மற்றும் $a + b \geq 0$ என இரண்டும் ஆகமாறு ஒரு முழுவெண் a உண்டு.

(d) $ab < 0$ மற்றும் $a + b \geq 0$ என இரண்டும் ஆகமாறு ஒவ்வொரு முழுவெண் a இற்கும், ஒவ்வொரு முழுவெண் b உண்டு.

6. (a) தொகுத்தறிவு நிறுவல் முறையைப் பயன்படுத்தி, ஒவ்வொரு $n \in \mathbb{N}$ இற்கும், $3 \mid (2^{2n} - 1)$ என நிறுவுக.

(b) (i) ஒரு விகிதமுறா எண்ணினதும் மற்றும் ஒரு பூச்சியமல்லா விகிதமுறா எண்ணினதும் பெருக்கம் விகிதமுறாதது என நிறுவுக.

(ii) $\sqrt{2}$ மற்றும் $\sqrt{3}$ என்பன விகிதமுறா எண்கள் என கருதுவதன் மூலம், $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என நிறுவுக.