00069

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
இயற்கை விஞ்ஞானங்கள் பீடம்
விஞ்ஞானமாணி / கல்விமாணி பட்டப்பாடநெறி

திணைக்களம்	: கணிதம்
மட்டம்	: 03
பரீட்சையின் பெயர்	: இறுதிப் பரீட்சை
கற்கை தலைப்பு மற்றும் - குறியீடு	: பிரயோக கணிதம் I – ADE 3200
கல்வி ஆண்டு	: 2023/24
திகதி	: 26.10.2023
நேரம்	: மு.ப. 09.30 – மு.ப. 11.30
காலம்	: இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

பொது அறிவுறுத்தல்கள்

1. வினாக்களுக்கு விடையளிக்க முன் அனைத்து அறிவுறுத்தல்களையும் கவனமாக வாசிக்கவும்.
2. இவ் வினாப்பத்திரமானது **(6)** வினாக்களை **(2)** பக்கங்களில் கொண்டுள்ளது.
3. ஏதேனும் **(4)** வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக. எல்லா வினாக்களும் சமமான புள்ளிகளை கொண்டுள்ளன.
4. ஒவ்வொரு வினாக்குமான விடை ஒரு புதிய பக்கத்தில் ஆரம்பிக்கப்பட வேண்டும்.
5. பரீட்சைக் குற்றமாக கருதப்படும் எந்தவொரு செயலிலும் ஈடுபடுவது தண்டனைக்கு வழிவகுக்கும்.
6. வினாக்களுக்கு விடையளிக்கையில் நீல அல்லது கறுப்பு வண்ண மை ஒன்றை பயன்படுத்தவும்
7. உங்களுடைய சுட்டெண்ணை உங்களுடைய விடைத்தாளில் தெளிவாக குறிப்பிடவும்.

00069

The Open University of Sri Lanka
Faculty of Natural Sciences
B.Sc. / B. Ed. Degree Programme

Department	**: Mathematics**
Level	**: 03**
Name of the Examination	**: Final Examination**
Course Title and - Code	**: Applied Calculus I – ADE 3200**
Academic Year	**: 2023/24**
Date	**: 26.10.2023**
Time	**: 09.30a.m. –11.30a.m.**
Duration	**: Two Hours**

General Instructions

1. Read all instructions carefully before answering the questions.
2. This question paper consists of **(6)** questions in **(2)** pages.
3. Answer any **(4)** questions only. All questions carry equal marks.
4. Answer for each question should commence from a new page.
5. Involvement in any activity that is considered as an exam offense will lead to punishment.
6. Use blue or black ink to answer the questions.
7. Clearly state your index number in your answer script.

00069

ஏதேனும் நான்கு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக

1. பின்வரும் கூற்றுக்கள் உண்மையானதா அல்லது பொய்யானதா என்பதைத் துணிக. ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் உமது விடையை நியாயப்படுத்துக:

a) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-3}}$ ஆல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பின் ஆட்சி $[3/_2, \infty)$ ஆகும். (05 புள்ளிகள்)

b) இடது அல்லது வலது எல்லை இல்லாத நிலையில் புள்ளி ஒன்றின் சார்பு தொடர்ச்சியற்றது. (05 புள்ளிகள்)

c) தொடரி $\{2^n\}_{n=0}^{\infty}$ ஒரு வரைப்புற்ற தொடரி ஆகும். (05 புள்ளிகள்)

d) $f(x) = x^{1/3}$ ஆல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு $\mathbb{R}$ இல் ஒரு வகையிடத்தக்க சார்பாகும். (05 புள்ளிகள்)

e) $y = \sqrt{1+x}$ எனின், $2(1+x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$ ஆகும். (05 புள்ளிகள்)

[மொத்தம் **25** புள்ளிகள்]

2. $f(x) = 1 + 6x^2 - 2x^3$ ஆல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பைக் கருதுக.

a) f இன் ஆட்சியைக் காண்க. (02 புள்ளிகள்)

b) y –இடைவெட்டு(கள்) ஐ துணிக. (02 புள்ளிகள்)

c) $f'(x)$ ஐ காண்க, மற்றும் இதிலிருந்து, f அதிகரிக்கும் மற்றும் குறையும் ஆயிடை(கள்) ஐ துணிக. ஓரிட உயர்வு அல்லது/மற்றும் இழிவின் ஆள்கூறுகளை கண்டறிக மற்றும் அவற்றுக்கு பெறுமதிகள் இருப்பின் அவற்றைத் துணிக. (06 புள்ளிகள்)

d) $f''(x)$ ஐ காண்க, மற்றும் இதிலிருந்து, சார்பு f மேல் குழிவு மற்றும் கீழ் குழிவு என்பவற்றிற்கான ஆயிடை(களை) (ஏதாவது இருப்பின்) கண்டறிக, விபத்திப் புள்ளிகள் ஏதேனும் இருப்பின் அவற்றினுடைய ஆள்கூறுகளை காண்க. (05 புள்ளிகள்)

e) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ மற்றும் $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ இனைக் காண்க. (02 புள்ளிகள்)

f) f இன் வரைபை வரைக. (08 புள்ளிகள்)

[மொத்தம் **25** புள்ளிகள்]

3. பின்வரும் வினாக்களுக்கான விடைகளைக் காண்க:

a) $(0, 10)$ என்னும் புள்ளியில் $f(x) = 7e^x + 3$ இற்கு வரையப்பட்ட தொடலிக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (05 புள்ளிகள்)

b) பெறுதிகள் விதிகளைப் பயன்படுத்தி, $g'(x)$ ஐ கணிக்க, இங்கு $g(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$ ஆகும். (10 புள்ளிகள்)

c) உள்ளார் வகையீட்டைப் பயன்படுத்தி, $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க, இங்கு $x^4 + 1 - x^2y = 3xy$ ஆகும். (10 புள்ளிகள்)

[மொத்தம் **25** புள்ளிகள்]

00069

Answer any **FOUR** questions only

1. Determine whether the following statements are **TRUE** or **FALSE**. In each case justify your answer:
   a) The domain of the function defined by $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-3}}$, is $[{}^{3}/_{2}, \infty)$. (05 marks)
   b) A discontinuity of a function at a point is where left or right limit does not exist. (05 marks)
   c) The sequence $\{2^n\}_{n=0}^{\infty}$ is a bounded sequence. (05 marks)
   d) The function defined by $f(x) = x^{1/3}$ is a differentiable function in $\mathbb{R}$. (05 marks)
   e) If $y = \sqrt{1+x}$ then $2(1+x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$. (05 marks)

[Total marks 25]

2. Consider the function defined by $f(x) = 1 + 6x^2 - 2x^3$.
   a) Find the domain of f. (02 marks)
   b) Determine the y –intercept(s). (02 marks)
   c) Find $f'(x)$, and hence, determine the interval(s), where f is increasing and decreasing. Identify the coordinates of local maxima or/and minima and determine their values if exist. (06 marks)
   d) Find $f''(x)$, and hence, identify the interval(s) (if any) that the function f is concave up or/and concave down. If there are any inflection points identify their coordinates. (05 marks)
   e) Find $\lim_{x\to\infty} f(x)$ and $\lim_{x\to-\infty} f(x)$? (02 marks)
   f) Sketch the graph of f. (08 marks)

[Total marks 25]

3. Find the answers for the following questions:
   a) Find the equation of the tangent line drawn to $f(x) = 7e^x + 3$ at the point $(0, 10)$. (05 marks)
   b) Using the derivatives rules, calculate $g'(x)$, where $g(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$. (10 marks)
   c) Using implicit differentiation, find $\frac{dy}{dx}$, where $x^4 + 1 - x^2y = 3xy$. (10 marks)

[Total marks 25]

[Turn over

00069

4. a) ஒரு தண்ணீர் தொட்டியானது அச்சு செங்குத்தாகவும் மற்றும் உச்சி கீழ் நோக்கியும் ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பு வடிவில் உள்ளது. தொட்டியின் ஆரை 3 m மற்றும் உயரம் 5 m. ஆரம்பத்தில் தொட்டி தண்ணீரால் நிரப்பப்படுகிறது, ஆனால் $t = 0$ (செக்கன்களில்) நேரத்தில், உச்சியில் ஒரு சிறிய துளை இடப்பட்டு தண்ணீர் வடிந்து போகத் தொடங்குகிறது. தொட்டியில் உள்ள தண்ணீரின் உயரம் 3 m ஆக குறைந்தவுடன், தண்ணீர் $2\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ இல் வெளியேறுகிறது. அப்போது எந்த விகிதத்தில், செக்கனுக்கு மீட்டரில், தொட்டியில் தண்ணீர் மட்டம் குறைகிறது?

(குறிப்பு: ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் கணவளவு $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ இனால் தரப்படுகிறது, இங்கு r என்பது ஆரை மற்றும் h என்பது உயரம் ஆகும்.) (15 புள்ளிகள்)

b) கீழே வரையறுக்கப்பட்டுள்ள துண்டு துண்டான சார்பு f இற்கு, $x = 2$ இல் சார்பு தொடர்ச்சியாக இருக்குமாறான k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 - 16x + 20}{(x-2)^2} & for\ x \neq 2 \\ k & for\ x = 2 \end{cases}$$

(10 புள்ளிகள்)

[மொத்தம் **25** புள்ளிகள்]

5. a) $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ ஒருங்குமா அல்லது விரியுமா எனக் குறிப்பிடுக. உமது விடையை விளக்குக.

(05 புள்ளிகள்)

b) அனைத்து $n \in \mathbb{N}$ இற்கும் $a_1 = \sqrt{2}$ மற்றும் $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ உடன் அதிகரிக்கும் தொடர் $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ இனைக் கருதுக.

i) அனைத்து $n \in \mathbb{N}$ இற்கும் $a_n \leq 2$ எனக் காட்டுக. (10 புள்ளிகள்)

ii) தொடர் ஒருங்குகின்றது எனத் தீர்மானித்து எல்லையை எழுதுக. (10 புள்ளிகள்)

[மொத்தம் **25** புள்ளிகள்]

6. a) ஒப்பீட்டுச் சோதனையைப் பயன்படுத்தி $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ என்னும் தொடர் ஒருங்கும் எனக் காட்டுக.

(09 புள்ளிகள்)

b) பின்வரும் ஒவ்வொன்றுக்கும், தொடர் ஒருங்குமா அல்லது விரியுமா எனத் துணிக:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)^2}$. (08 புள்ளிகள்)

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{n}{3n+1})^n$. (08 புள்ளிகள்)

[மொத்தம் **25** புள்ளிகள்]

********* வினாத்தாளின் முடிவு *********

4. a) A water tank is in the shape of a right circular cone with the axis vertical and vertex downward. The tank has radius 3 m and is 5 m high. Initially the tank is filled by water, but at time $t = 0$ (in seconds), a small hole at the vertex is opened and the water starts to drain. When the height of water in the tank has dropped to 3 m, the water is flowing out at 2 m^3/s. At what rate, in meters per second, is the water level in the tank dropping then?

(Note: The volume of a right circular cone is given by $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, where r is the radius and h is the height.) (15 marks)

b) For the the piecewise function f defined below, find the value of k such that the function is continuous at $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 - 16x + 20}{(x-2)^2} & for\ x \neq 2 \\ k & for\ x = 2 \end{cases}$$

(10 marks)

[Total marks 25]

5. a) State whether $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ converges or diverges. Explain your answer. (05 marks)

b) Consider the increasing sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ with $a_1 = \sqrt{2}$ and $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ for $n \in \mathbb{N}$.

i) Show that $a_n \leq 2$ for all $n \in \mathbb{N}$. (10 marks)

ii) Conclude that the sequence is convergent and write the limit. (10 marks)

[Total marks 25]

6. a) Use comparison test to show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ is convergent. (09 marks)

b) For each of the following, determine whether the series converges or diverges:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)^2}$. (08 marks)

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{n}{3n+1})^n$. (08 marks)

[Total marks 25]

********* END OF QUESTION PAPER *********