00261

ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්ව විද්‍යාලය

ස්වභාවික විද්‍යා පීඨය

විද්‍යාවේදී / අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව

| | |
|---|---|
| දෙපාතර්මේන්තුව | : ගණිතය |
| මට්ටම | : තුන්වන |
| විභාගයේ නම | : අවසාන විභාගය |
| පාඨමාලා නාමය - පාඨමාලා කේතය | : දෛශික වීජ ගණිතය – ADU3300/ADE3300 |
| අධ්‍යයන වර්ෂය | : 2023/24 |
| දිනය | : 09.10.2023 |
| වේලාව | : ප.ව. 1.30 සිට ප.ව. 3.30 දක්වා |
| කාලය | : පැය 2 යි |

උපදෙස්

1. ප්‍රශ්න පත්‍රය ප්‍රශ්න 6 කින් සමන්විත අතර එය පිටු 04 ක අඩංගු වේ.
2. සියලුම ප්‍රශ්න සඳහා සමාන ලකුණු හිමිවන අතර ප්‍රශ්න 04 කට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
3. අවශ්‍ය නම් පමණක් දළ රූප සටහන් පැහැදිලිව සළකුණු කරන්න.

(01) (a) $O$ මූල ලක්ෂ්‍යයකට සාපේක්ෂව $P_1$ සහ $P_2$ ලක්ෂවල පිහිටුම් දෛශික $\underline{r_1}$, $\underline{r_2}$ සහ $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ දිශා කෝසයින පිළිවෙලින් $(l_1, m_1, n_1)$ සහ $(l_2, m_2, n_2)$ වේ.

(i) $\overrightarrow{P_1P_2} = (r_2 l_2 - r_1 l_1)\underline{i} + (r_2 m_2 - r_1 m_1)\underline{j} + (r_2 n_2 - r_1 n_1)\underline{k}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $r_1 = |\underline{r_1}|$ සහ $r_2 = |\underline{r_2}|$ වේ.

(ii) $\theta$ යනු $\overrightarrow{OP_1}$ සහ $\overrightarrow{OP_2}$ අතර සුළු කෝණය වේ. $\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$ බව පෙන්වන්න.

00261

# The Open University of Sri Lanka
# Faculty of Natural Sciences
# B.Sc. / B. Ed. Degree Programme

| | |
|---|---|
| **Department** | **: Mathematics** |
| **Level** | **: 03** |
| **Name of the Examination** | **: Final Examination** |
| **Course Title and - Course Code** | **: Vector Algebra – ADU3300/ADE3300** |
| **Academic Year** | **: 2023/24** |
| **Date** | **: 09.10.2023** |
| **Time** | **: 1.30 p.m. To 3.30 p.m.** |
| **Duration** | **: Two Hours.** |

**General Instructions**

1. This question paper consists of **(6)** questions in **(3)** pages.
2. Answer any **(4)** questions only. All questions carry equal marks.
3. Draw fully and clearly labelled diagrams where necessary.

(01) (a) The position vectors of the points $P_1$ and $P_2$ relative to the origin $O$ are $\underline{r_1}$, $\underline{r_2}$ and the direction cosines of $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ are $(l_1, m_1, n_1)$ and $(l_2, m_2, n_2)$ respectively.

(i) Show that $\overrightarrow{P_1P_2} = (r_2 l_2 - r_1 l_1)\underline{i} + (r_2 m_2 - r_1 m_1)\underline{j} + (r_2 n_2 - r_1 n_1)\underline{k}$ where $r_1 = |\underline{r_1}|$ and $r_2 = |\underline{r_2}|$,

(ii) If $\theta$ is the angle between $\overrightarrow{OP_1}$ and $\overrightarrow{OP_2}$, show that $\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$.

(b) With respect to a fixed origin $O$, the straight lines $l_1$ and $l_2$ are given by

$$l_1 : \underline{r} = \underline{i} - \underline{j} + \lambda(2\underline{i} + \underline{j} - 2\underline{k})$$

$$l_2 : \underline{r} = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k} + \mu(-3\underline{i} + 4\underline{k}),$$

where $\lambda$ and $\mu$ are scalar parameters.

(i) Show that the lines intersect,

(ii) Find the position vector of their point of intersection,

(iii) Find a vector equation of the plane containing the lines,

(iv) Hence find the Cartesian equation of the plane containing these two lines.

(b) $O$ මූල ලක්ෂ්‍යයකට සාපේක්ෂව දී ඇති සරල රේඛා දෙකක්

$l_1 : \underline{r} = \underline{i} - \underline{j} + \lambda(2\underline{i} + \underline{j} - 2\underline{k})$ සහ

$l_2 : \underline{r} = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k} + \mu(-3\underline{i} + 4\underline{k})$

වන අතර $\lambda$ සහ $\mu$ යනු පරාමිතීන් දෙකකි.

(i) සරල රේඛා දෙක එකිනෙක ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න.

(ii) ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න.

(iii) සරල රේඛා පිහිටි තලයේ දෛශික සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

(iv) එනයින් රේඛා දෙක පිහිටි තලයේ කාටීසියානු සමීකරණය සොයන්න.

(02) (a) ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා වූ සයින් සූත්‍රය ඔප්පු කරන්න.

(b) $\underline{r} \cdot (3\underline{i} - \underline{j} - 5\underline{k}) = 1$ තලය සහ $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-4} = z - 2$ රේඛාව අතර වූ සුළු කෝණය සොයන්න.

(c) $\underline{r}(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right)$ පථය වෘත්තයක් බව පෙන්වන එහි කේන්ද්‍රය, අරය සහ පිහිටි තලයේ සමීකරණය සොයන්න.

(03) (a) $A$ ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක $(1, 2, 0)$ සහ $l$ රේඛාවේ දෛශික සමීකරණය $\underline{r} = 2\underline{i} + 6\underline{k} + \lambda(\underline{j} + 2\underline{k})$ වේ. $B$ ලක්ෂ්‍යය $l$ රේඛාව මත පිහිටනුයේ $\overrightarrow{AB}$ දෛශිකය $l$ රේඛාවට ලම්භ වන පරිදි ය. $A$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $l$ රේඛාවට ඇති කෙටිම දුර සොයන්න.

(b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ සහ $\underline{d}$ දෛශික වන අතර සාමාන්‍ය අංකනය පරිදි $[\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}] = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$ වේ.පහත ප්‍රතිඵල සාධනය කරන්න.

(i) $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{b} \cdot \underline{c})(\underline{a} \cdot \underline{d})$ බව පෙන්වන්න.

(ii) එනයින් $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) + (\underline{b} \times \underline{c}) \cdot (\underline{a} \times \underline{d}) + (\underline{c} \times \underline{a}) \cdot (\underline{b} \times \underline{d}) = 0$ බව අපෝහනය කරන්න.

(iii) $[\underline{a} \times \underline{b}\quad \underline{a} \times \underline{c}\quad \underline{d}] = (\underline{a} \cdot \underline{d})[\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}]$ බව පෙන්වන්න.

(02) (a) Prove the Sine rule for plane triangles.

(b) Find the acute angle between the plane $\underline{r} \cdot (3\underline{i} - \underline{j} - 5\underline{k}) = 1$ and the line $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-4} = z - 2$.

(c) Show that the curve $\underline{r}(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t\,, 1 - \sin t\,, -\frac{3}{5}\cos t\right)$ is a circle. Find the centre, radius and the equation of the plane of the circle.

(03) (a) Point $A$ has coordinates $(1, 2, 0)$ and the line $l$ has the equation $\underline{r} = 2\,\underline{i} + 6\underline{k} + \lambda(\underline{j} + 2\underline{k})$. Point $B$ lies on the $l$ such that $\overrightarrow{AB}$ is perpendicular to $l$. Find the shortest distance from $A$ to the line $l$.

(b) Let $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ and $\underline{d}$ be vectors and as usual the notation $[\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}] = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$ applies. Prove the following results.

(i) $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{b} \cdot \underline{c})(\underline{a} \cdot \underline{d})$,

(ii) Deduce that, $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) + (\underline{b} \times \underline{c}) \cdot (\underline{a} \times \underline{d}) + (\underline{c} \times \underline{a}) \cdot (\underline{b} \times \underline{d}) = 0$,

(iii) $[\underline{a} \times \underline{b}\ \ \underline{a} \times \underline{c}\ \ \underline{d}] = (\underline{a} \cdot \underline{d})[\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}]$.

(c) Solve the following simultaneous vector equation for $\underline{x}$

$\underline{a} \times \underline{x} = \underline{a} \times \underline{b}$ and $\underline{a} \cdot (\underline{x} - \underline{b}) = 2|\underline{a}|^2$, where $\underline{a}$ and $\underline{b}$ are given vectors.

(04) (a) Find the domain of the vector valued function $\underline{F}(t) = \ln(2t-1)\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\underline{j} + e^t\underline{k}$.

(b) Find the limits of the following vector valued functions, if they exist. Otherwise, state that the limit does not exist.

(i) $\lim_{t \to 0}\left(\frac{\log(1+t)}{t}\underline{i} + \frac{e^t-1}{t}\underline{j} + \left(\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}\right)\underline{k}\right)$,

(ii) $\lim_{t \to \infty}\left(e^{-t}\underline{i} + \tan^{-1} t\,\underline{j} + \frac{(t+1)}{(t^2-t-2)}\underline{k}\right)$.

(c) A particle moves along a curve on a plane so that its position at any time $t$ is given by the position vector $\underline{r}(t) = (\cos(2t) + t^2)\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j} + 4t^3\,\underline{k}$. Calculate the acceleration of the particle at time $t$.

(c) පහත සමගාමී සමීකරණය විසඳා $\underline{x}$ සොයන්න. $\underline{a} \times \underline{x} = \underline{a} \times \underline{b}$ සහ $\underline{a} \cdot (\underline{x} - \underline{b}) = 2|\underline{a}|^2$ වේ. මෙහි $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ දී ඇති දෛශික වේ.

(04)(a) $\underline{F}(t) = \ln(2t-1)\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\underline{j} + e^t\underline{k}$ දෛශික ශ්‍රිතයෙහි වසම සොයන්න.

(b) පහත සඳහන් දෛශික ශ්‍රිතයන්හි සීමා පවතී යි නම් සොයන්න.සීමා නොපවතියි නම් ඒ බව සඳහන් කරන්න.

(i) $\lim_{t\to 0}\left(\frac{\log\,(1+t)}{t}\,\underline{i} + \frac{e^t-1}{t}\,\underline{j} + \left(\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}\right)\underline{k}\right)$,

(ii) $\lim_{t\to\infty}\left(e^{-t}\,\underline{i} + \tan^{-1}t\,\underline{j} + \frac{(t+1)}{(t^2-t-2)}\,\underline{k}\right)$.

(c) අංශුවක් තල වක්‍රයක චලිත වනුයේ, කාලය $t$ වන විට එහි පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{r}(t) = (\cos(2t) + t^2)\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j} + 4t^3\,\underline{k}$ වන පරිදිය. කාලය $t$ වන විට අංශුවෙහි ත්වරණය ගණනය කරන්න.

(05) (a) $\underline{f}(t)$ , $\underline{g}(t)$ , $\underline{h}(t)$ යනු $t$ විෂයෙහි අවකලාා දෛශික ශ්‍රිත 03 කි.

$$\frac{d}{dt}\left\{\underline{f}(t) \times \left(\underline{g}(t) \times \underline{h}(t)\right)\right\} = \frac{d\underline{f}(t)}{dt} \times \left(\underline{g}(t) \times \underline{h}(t)\right) + \underline{f}(t) \times \left(\frac{d\underline{g}(t)}{dt} \times \underline{h}(t)\right) +$$

$$\underline{f}(t) \times \left(\underline{g}(t) \times \frac{d\underline{h}(t)}{dt}\right)$$ බව පෙන්වන්න.

(b) $\underline{f}(t)$ යනු $t \in \mathbb{R}$ හි අවකලාා ශ්‍රිතයන් වන අතර, $\underline{c}$ යනු නියත දෛශිකයකි.

(i) $\int \underline{f}(t) \times \frac{d^2\underline{f}(t)}{dt^2}\,dt = \underline{f}(t) \times \frac{d\underline{f}(t)}{dt} + \underline{c}$ සහ

(ii) $2\int \underline{f}(t) \cdot \frac{d\underline{f}(t)}{dt}\,dt = |\underline{f}(t)|^2 + \underline{c}$.

බව පෙන්වන්න.

(c) (i) $\underline{r}(t) = 5t^2\,\underline{i} + t\,\underline{j} - t^3\,\underline{k}$ නම් $\int_1^2 \underline{r}(t) \times \frac{d^2\underline{r}(t)}{dt^2}\,dt = -14\,\underline{i} + 75\,\underline{j} - 15\,\underline{k}$ බව සාධනය කරන්න.

(ii) $\underline{r}(t) = \sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j} - \sin t\,\underline{k}$ වේ නම්, $\int_0^{\pi/2} \underline{r}(t) \cdot \frac{d\underline{r}(t)}{dt}\,dt$ ගණනය කරන්න.

(05) (a) Let $\underline{f}(t), \underline{g}(t), \underline{h}(t)$ be three differentiable vector functions of $t$. Show that

$$\frac{d}{dt}\left\{\underline{f}(t) \times \left(\underline{g}(t) \times \underline{h}(t)\right)\right\} = \frac{d\underline{f}(t)}{dt} \times \left(\underline{g}(t) \times \underline{h}(t)\right) + \underline{f}(t) \times \left(\frac{d\underline{g}(t)}{dt} \times \underline{h}(t)\right) + \underline{f}(t) \times \left(\underline{g}(t) \times \frac{d\underline{h}(t)}{dt}\right).$$

(b) Let $\underline{f}(t)$ be differentiable for each $t \in \mathbb{R}$ and let $\underline{c}$ be an arbitrary constant vector. Show that

(i) $\int \underline{f}(t) \times \frac{d^2\underline{f}(t)}{dt^2} dt = \underline{f}(t) \times \frac{d\underline{f}(t)}{dt} + \underline{c}$ and

(ii) $2\int \underline{f}(t) \cdot \frac{d\underline{f}(t)}{dt} dt = |\underline{f}(t)|^2 + \underline{c}$.

(c) (i) If $\underline{r}(t) = 5t^2\ \underline{i} + t\ \underline{j} - t^3\ \underline{k}$, prove that

$$\int_1^2 \underline{r}(t) \times \frac{d^2\underline{r}(t)}{dt^2}\, dt = -14\,\underline{i} + 75\,\underline{j} - 15\,\underline{k},$$

(ii) Let $\underline{r}(t) = \sin t\ \underline{i} + \cos t\ \underline{j} - \sin t\ \underline{k}$. Compute

$$\int_0^{\pi/2} \underline{r}(t) \cdot \frac{d\underline{r}(t)}{dt}\, dt.$$

(06) (a) Show that the curve $\underline{r}(t) = 2\,t\,\underline{i} + (1+4t)t\,\underline{j}$ is a parabola, where $t$ is a parameter.

(b) A space curve is given by $\underline{r}(t) = 2\sin t\ \underline{i} + 2\cos t\ \underline{j} + 2t\cot\alpha\ \underline{k}$, where $t$ is a parameter and $0 < \alpha < \pi$. Find

(i) the unit tangent vector $\underline{T}$,

(ii) the principal normal vector $\underline{N}$ and the curvature,

(iii) the unit binomial vector $\underline{B}$ and torsion.

(06) (a) පරාමිතිය $t$ ඇසුරෙන් $\underline{r}(t) = 2t\,\underline{i} + (1+4t)t\,\underline{j}$ වක්‍රය පරාවලයක් බව පෙන්වන්න.

(b) අවකාශ පථයක සමීකරණය $t$ පරාමිතිය ඇසුරෙන් $\underline{r}(t) = 2\sin t\;\underline{i} + 2\cos t\;\underline{j} + 2t\cot\alpha\;\underline{k}$

වේ. මෙහි $0 < \alpha < \pi$ වේ.

(i) $\underline{T}$ ඒකක ස්පර්ශක දෛශිකය,

(ii) $\underline{N}$ ප්‍රධාන අභිලම්භය සහ වක්‍රතාව,

(iii) $\underline{B}$ අපර අභිලම්භය සහ ව්‍යාවර්ථය සොයන්න.