

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
இயற்கை விஞ்ஞானங்கள் பீடம்
விஞ்ஞானமாணி / கல்விமாணி பட்டப்பாடநெறி



திணைக்களம்	: கணிதம்
மட்டம்	: 03
பரீட்சையின் பெயர்	: இறுதிப் பரீட்சை
கற்கை தலைப்பு மற்றும் - குறியீடு	: காவி அட்சர கணிதம் - ADU3300
கல்வி ஆண்டு	: 2023/24
திகதி	: 09.10.2023
நேரம்	: பிப 1.30 இலிருந்து பிப 3.30 வரை
காலம்	: 02 மணித்தியாலங்கள்.

பொது அறிவுறுத்தல்கள்

1. இவ் வினாப்பத்திரமானது (6) வினாக்களை (3) பக்கங்களில் கொண்டுள்ளது.
2. ஏதேனும் (4) வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக. எல்லா வினாக்களும் சமமான புள்ளிகளை கொண்டுள்ளன.
3. தேவையான இடங்களில் முழுமையாகவும் தெளிவாகவும் பெயரிடப்பட்ட வரைபடங்களை வரையவும்.

(01) (a) உற்பத்தி O தொடர்பாக புள்ளிகள் P_1 மற்றும் P_2 வின் தானக் காவிகள் முறையே r_1, r_2 மற்றும் $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$ வின் திசைக் கோசைன்கள் முறையே (l_1, m_1, n_1) மற்றும் (l_2, m_2, n_2) ஆகும்.

(i) $\overrightarrow{P_1P_2} = (r_2 l_2 - r_1 l_1)\underline{i} + (r_2 m_2 - r_1 m_1)\underline{j} + (r_2 n_2 - r_1 n_1)\underline{k}$ எனக் காட்டுக, இங்கு $r_1 = |r_1|$ மற்றும் $r_2 = |r_2|$ ஆகும்.

(ii) $\overrightarrow{OP_1}$ மற்றும் $\overrightarrow{OP_2}$ இற்கிடையிலான கோணம் θ எனின், $\cos \theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$ எனக் காட்டுக.

(b) நிலையான உற்பத்தி O தொடர்பாக, நேர் கோடுகள் l_1 மற்றும் l_2 என்பன

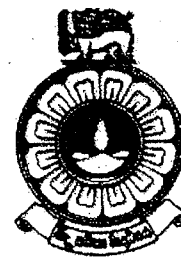
$$l_1 : \underline{r} = \underline{i} - \underline{j} + \lambda(2\underline{i} + \underline{j} - 2\underline{k}),$$

$$l_2 : \underline{r} = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k} + \mu(-3\underline{i} + 4\underline{k}) \text{ என்பவற்றினால் தரப்படுகின்றன,}$$

இங்கு λ மற்றும் μ என்பன எண்ணிப் பரமானங்கள் ஆகும்.

- (i) கோடுகள் இடைவெட்டுகின்றன எனக் காட்டுக,
- (ii) அவற்றின் இடைவெட்டுப் புள்ளியின் தானக் காவியைக் காண்க,
- (iii) கோடுகளைக் கொண்ட தளத்தின் ஒரு காவிச் சமன்பாட்டைக் காண்க,

The Open University of Sri Lanka
Faculty of Natural Sciences
B.Sc. / B. Ed. Degree Programme



Department	: Mathematics
Level	: 03
Name of the Examination	: Final Examination
Course Title and - Course Code	: Vector Algebra – ADU3300/ADE3300
Academic Year	: 2023/24
Date	: 09.10.2023
Time	: 1.30 p.m. To 3.30 p.m.
Duration	: Two Hours.

General Instructions

1. This question paper consists of (6) questions in (3) pages.
2. Answer any (4) questions only. All questions carry equal marks.
3. Draw fully and clearly labelled diagrams where necessary.

(01) (a) The position vectors of the points P_1 and P_2 relative to the origin O are $\underline{r}_1, \underline{r}_2$ and the direction cosines of $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$ are (l_1, m_1, n_1) and (l_2, m_2, n_2) respectively.

(i) Show that $\overrightarrow{P_1P_2} = (r_2 l_2 - r_1 l_1)\underline{i} + (r_2 m_2 - r_1 m_1)\underline{j} + (r_2 n_2 - r_1 n_1)\underline{k}$
 where $r_1 = |\underline{r}_1|$ and $r_2 = |\underline{r}_2|$,

(ii) If θ is the angle between $\overrightarrow{OP_1}$ and $\overrightarrow{OP_2}$, show that
 $\cos \theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$.

(b) With respect to a fixed origin O , the straight lines l_1 and l_2 are given by

$$l_1 : \underline{r} = \underline{i} - \underline{j} + \lambda(2\underline{i} + \underline{j} - 2\underline{k})$$

$$l_2 : \underline{r} = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k} + \mu(-3\underline{i} + 4\underline{k}),$$

where λ and μ are scalar parameters.

- (i) Show that the lines intersect,
- (ii) Find the position vector of their point of intersection,
- (iii) Find a vector equation of the plane containing the lines,
- (iv) Hence find the Cartesian equation of the plane containing these two lines.

(iv) இதிலிருந்து இவ்விரண்டு கோடுகளையும் கொண்ட தளத்தின் தெக்காட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(02) (a) தள முக்கோணங்களுக்கான சைன் விதியை நிறுவுக.

(b) தளம் $\underline{r} \cdot (3\underline{i} - \underline{j} - 5\underline{k}) = 1$ மற்றும் $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-4} = z-2$ என்னும் கோட்டிற்கும்

இடையிலான கூர்ங்கோணத்தினைக் காண்க.

(c) $\underline{r}(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t\right)$ என்னும் வளையி ஒரு வட்டம் எனக் காட்டுக.

வட்டத்தின் மையம், ஆரை மற்றும் தளத்தின் சமன்பாடு என்பவற்றைக் காண்க.

(03) (a) புள்ளி A ஆள்கூறுகள் $(1, 2, 0)$ ஐக் கொண்டுள்ளது மற்றும் கோடு l சமன்பாடு

$\underline{r} = 2\underline{i} + 6\underline{k} + \lambda(\underline{j} + 2\underline{k})$ ஐக் கொண்டுள்ளது. \overline{AB} ஆனது l இற்கு செங்குத்தாக இருக்குமாறு l இன் மேல் புள்ளி B உள்ளது.

A இலிருந்து கோடு l இற்கான குறுகிய தூரத்தைக் காண்க.

(b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ மற்றும் \underline{d} ஆகியவை காவிகள் மற்றும் வழமையான குறியீட்டுடன்

$[\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}] = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$ என்பது பொருந்தும் என்க. பின்வரும் முடிவுகளை நிறுவுக.

(i) $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{b} \cdot \underline{c})(\underline{a} \cdot \underline{d}).$

(ii) $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) + (\underline{b} \times \underline{c}) \cdot (\underline{a} \times \underline{d}) + (\underline{c} \times \underline{a}) \cdot (\underline{b} \times \underline{d}) = 0$ என்பதை ஊய்த்தறிக.

(iii) $[\underline{a} \times \underline{b} \ \underline{a} \times \underline{c} \ \underline{d}] = (\underline{a} \cdot \underline{d})[\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}].$

(c) \underline{x} இற்கான பின்வரும் ஒருங்கமைச் சமன்பாட்டை தீர்க்க,

$\underline{a} \times \underline{x} = \underline{a} \times \underline{b}$ மற்றும் $\underline{a} \cdot (\underline{x} - \underline{b}) = 2|\underline{a}|^2$, இங்கு \underline{a} மற்றும் \underline{b} என்பன தரப்பட்ட காவிகள் ஆகும்.

(04) (a) காவி பெறுமானச் சார்பு $\underline{F}(t) = \ln(2t-1)\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\underline{j} + e^t\underline{k}$ இன் ஆட்சியைக் காண்க.

(b) பின்வரும் காவி பெறுமானச் சார்புகளுக்கு எல்லை இருப்பின், அவற்றைக் காண்க. இல்லையெனில், எல்லை இல்லை என்று குறிப்பிடுக.

(i) $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\log(1+t)}{t} \underline{i} + \frac{e^t-1}{t} \underline{j} + \left(\frac{\sqrt{1+t}-1}{t} \right) \underline{k} \right),$

(ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{-t} \underline{i} + \tan^{-1} t \underline{j} + \frac{(t+1)}{(t^2-t-2)} \underline{k} \right).$

- (02) (a) Prove the Sine rule for plane triangles.
- (b) Find the acute angle between the plane $\underline{r} \cdot (3\underline{i} - \underline{j} - 5\underline{k}) = 1$ and the line $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-4} = z - 2$.
- (c) Show that the curve $\underline{r}(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t\right)$ is a circle. Find the centre, radius and the equation of the plane of the circle.

- (03) (a) Point A has coordinates $(1, 2, 0)$ and the line l has the equation

$$\underline{r} = 2\underline{i} + 6\underline{k} + \lambda(\underline{j} + 2\underline{k}).$$

Point B lies on the l such that \overline{AB} is perpendicular to l .

Find the shortest distance from A to the line l .

- (b) Let $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ and \underline{d} be vectors and as usual the notation $[\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}] = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$

applies. Prove the following results.

- (i) $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{b} \cdot \underline{c})(\underline{a} \cdot \underline{d})$,
- (ii) Deduce that, $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) + (\underline{b} \times \underline{c}) \cdot (\underline{a} \times \underline{d}) + (\underline{c} \times \underline{a}) \cdot (\underline{b} \times \underline{d}) = 0$,
- (iii) $[\underline{a} \times \underline{b} \ \underline{a} \times \underline{c} \ \underline{d}] = (\underline{a} \cdot \underline{d})[\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}]$.
- (c) Solve the following simultaneous vector equation for \underline{x}
 $\underline{a} \times \underline{x} = \underline{a} \times \underline{b}$ and $\underline{a} \cdot (\underline{x} - \underline{b}) = 2|\underline{a}|^2$, where \underline{a} and \underline{b} are given vectors.

- (04) (a) Find the domain of the vector valued function $\underline{F}(t) = \ln(2t - 1)\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}\underline{j} + e^t\underline{k}$.
- (b) Find the limits of the following vector valued functions, if they exist. Otherwise, state

that the limit does not exist.

- (i) $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\log(1+t)}{t} \underline{i} + \frac{e^t - 1}{t} \underline{j} + \left(\frac{\sqrt{1+t} - 1}{t} \right) \underline{k} \right)$,
- (ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{-t} \underline{i} + \tan^{-1} t \underline{j} + \frac{(t+1)}{(t^2 - t - 2)} \underline{k} \right)$.

- (c) A particle moves along a curve on a plane so that its position at any time t is given by the position vector $\underline{r}(t) = (\cos(2t) + t^2) \underline{i} + \sin t \underline{j} + 4t^3 \underline{k}$. Calculate the acceleration of the particle at time t .

(c) ஒரு பொருள் ஒரு தளத்தில் உள்ள ஒரு வளையியின் போக்கில் நகர்கிறது, யாதாயினும் நேரம் t இல் அதன் தானம் $\underline{r}(t) = (\cos(2t) + t^2) \underline{i} + \sin t \underline{j} + 4t^3 \underline{k}$ என்னும் தானக் காவியால் தரப்படுகிறது. t நேரத்தில் பொருளின் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

(05) (a) $\underline{f}(t), \underline{g}(t), \underline{h}(t)$ என்பன t இன் மூன்று வகையீட்டு காவிச் சார்புகள் என்க.

$$\frac{d}{dt} \{ \underline{f}(t) \times (\underline{g}(t) \times \underline{h}(t)) \} = \frac{d\underline{f}(t)}{dt} \times (\underline{g}(t) \times \underline{h}(t)) + \underline{f}(t) \times \left(\frac{d\underline{g}(t)}{dt} \times \underline{h}(t) \right) + \underline{f}(t) \times \left(\underline{g}(t) \times \frac{d\underline{h}(t)}{dt} \right) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

(b) ஒவ்வொரு $t \in \mathbb{R}$ இற்கும் $\underline{f}(t)$ வகையிடத் தக்கது என்க மற்றும் \underline{c} ஒரு எதேச்சச் ஒருமை காவி என்க.

$$(i) \int \underline{f}(t) \times \frac{d^2 \underline{f}(t)}{dt^2} dt = \underline{f}(t) \times \frac{d\underline{f}(t)}{dt} + \underline{c},$$

$$(ii) 2 \int \underline{f}(t) \cdot \frac{d\underline{f}(t)}{dt} dt = |\underline{f}(t)|^2 + \underline{c}, \text{ எனக் காட்டுக.}$$

(c) (i) $\underline{r}(t) = 5t^2 \underline{i} + t \underline{j} - t^3 \underline{k}$ எனின்,

$$\int_1^2 \underline{r}(t) \times \frac{d^2 \underline{r}(t)}{dt^2} dt = -14 \underline{i} + 75 \underline{j} - 15 \underline{k} \text{ என நிறுவுக.}$$

(ii) $\underline{r}(t) = \sin t \underline{i} + \cos t \underline{j} - \sin t \underline{k}$ என்க.

$$\int_0^{\pi/2} \underline{r}(t) \cdot \frac{d\underline{r}(t)}{dt} dt \text{ ஐ மதிப்பிடுக.}$$

(06) (a) வளையி $\underline{r}(t) = 2t \underline{i} + (1 + 4t)t \underline{j}$ என்பது ஒரு பரவளைவு எனக் காட்டுக, இங்கு t என்பது ஒரு பரமானம் ஆகும்.

(b) ஒரு வெளி வளையி $\underline{r}(t) = 2 \sin t \underline{i} + 2 \cos t \underline{j} + 2t \cot \alpha \underline{k}$ என்பதால் தரப்படுகிறது, இங்கு t என்பது ஒரு பரமானம் மற்றும் $0 < \alpha < \pi$ ஆகும்.

(i) அலகுத் தொடலிக் காவி \underline{T} ,

(ii) தலைமைச் செவ்வன் காவி \underline{N} மற்றும் வளைவு,

(iii) அலகு இருமைச் செவ்வன் காவி \underline{B} மற்றும் முறுக்கல், என்பவற்றைக் காண்க.

(05) (a) Let $\underline{f}(t)$, $\underline{g}(t)$, $\underline{h}(t)$ be three differentiable vector functions of t . Show that

$$\frac{d}{dt} \left\{ \underline{f}(t) \times (\underline{g}(t) \times \underline{h}(t)) \right\} = \frac{d\underline{f}(t)}{dt} \times (\underline{g}(t) \times \underline{h}(t)) + \underline{f}(t) \times \left(\frac{d\underline{g}(t)}{dt} \times \underline{h}(t) \right) + \underline{f}(t) \times \left(\underline{g}(t) \times \frac{d\underline{h}(t)}{dt} \right).$$

(b) Let $\underline{f}(t)$ be differentiable for each $t \in \mathbb{R}$ and let \underline{c} be an arbitrary constant vector. Show that

(i) $\int \underline{f}(t) \times \frac{d^2\underline{f}(t)}{dt^2} dt = \underline{f}(t) \times \frac{d\underline{f}(t)}{dt} + \underline{c}$ and

(ii) $2 \int \underline{f}(t) \cdot \frac{d\underline{f}(t)}{dt} dt = |\underline{f}(t)|^2 + \underline{c}$.

(c) (i) If $\underline{r}(t) = 5t^2 \underline{i} + t \underline{j} - t^3 \underline{k}$, prove that

$$\int_1^2 \underline{r}(t) \times \frac{d^2\underline{r}(t)}{dt^2} dt = -14 \underline{i} + 75 \underline{j} - 15 \underline{k},$$

(ii) Let $\underline{r}(t) = \sin t \underline{i} + \cos t \underline{j} - \sin t \underline{k}$. Compute

$$\int_0^{\pi/2} \underline{r}(t) \cdot \frac{d\underline{r}(t)}{dt} dt.$$

(06) (a) Show that the curve $\underline{r}(t) = 2t \underline{i} + (1 + 4t)t \underline{j}$ is a parabola, where t is a parameter.

(b) A space curve is given by $\underline{r}(t) = 2 \sin t \underline{i} + 2 \cos t \underline{j} + 2t \cot \alpha \underline{k}$, where t is a parameter and $0 < \alpha < \pi$. Find

- (i) the unit tangent vector \underline{T} ,
- (ii) the principal normal vector \underline{N} and the curvature,
- (iii) the unit binomial vector \underline{B} and torsion.