00075

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
கணிதத் திணைக்களம்
விஞ்ஞானத்தில் உயர்சான்றிதழ்
MYF2519/MHF2519 - இணைந்த கணிதம் I – மட்டம் 2
இறுதிப் பரீட்சை 2021/22

திகதி: **27-08-2023** நேரம்:- மு.ப. **9:30** இலிருந்து பி.ப. **12:30** வரை

பகுதி **A** இல் அனைத்து வினாக்களுக்கும் மற்றும் பகுதி **B** இல் ஐந்து வினாக்களுக்கும் விடையளிக்குக.

பகுதி A

1. (a) சார்பு $y = \frac{x}{(x+2)(x-1)}$, $x \neq -2,\ 1$ இன் ஆட்சி மற்றும் வீச்சு என்பவற்றைக் காண்க.

   (b) மேலுள்ள சார்பின் வரைபை வரைக.

2. சார்புகள் $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன $f: x \to x^2;\ x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$ மற்றும் $g: x \to 2x+5$; $x \in \mathbb{R}, x \geq -2.5$ இனால் வரையறுக்கப்படுகின்றன.

   பின்வருவனவற்றைக் காண்க:

   (a) $f \circ g$,
   (b) f^{-1},
   (c) g^{-1}
   (d) $f^{-1}g^{-1}$.
   (e) சமன்பாடு $f^{-1}g^{-1} = \sqrt{2}$ வைத் தீர்க்க

3. $px^2 + qx + r = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்றைய மூலத்தின் மூன்று மடங்கு எனின், $3q^2 = 16pr$ எனக் காட்டுக.

4. சமனிலி $3(2x+1) - (x+3)(x-1) < 0$ வைத் தீர்க்க.

5. புள்ளி $(1, -3)$ இற்கு ஊடாகவும், $4x - 3y + 1 = 0$ என்னும் கோட்டிற்கு செங்குத்தாகவும் செல்லும் நேர் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

6. $\log_a 3 + 2\log_a x - \log_a(x-1) = \log_a(5x+2)$ என்னும் சமன்பாட்டை திருப்திப்படுத்தும் x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

7. $(x+3)$ மற்றும் $(x-1)$ ஆகியன x^3+ax^2+bx-a இன் காரணிகள் எனின், a மற்றும் b இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. a மற்றும் b இப் பெறுமானங்களை எடுக்கும்போது, இந்தக் கோவை $x-k$ ஆல் வகுக்கப்படும்போது மீதி 15 ஆக இருந்தால், k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

8. $p,q \in \mathbb{R}$ மற்றும் $p \neq q$ எனின், சமன்பாடு $x^2-2px+(2p^2-2pq+q^2)=0$ இன் காரணிகள் மெய்யானவை அல்ல என நிறுவுக.

9. (a) $\tan\alpha = 2\cot\beta$ என ஆகுமாறு இரண்டு கோணங்கள் α மற்றும் β தரப்பட்டுள்ளன, $\tan(\alpha+\beta) = -(\tan\alpha+\tan\beta)$ எனக் காட்டுக.

   (b) சமன்பாடு $4\tan\theta = 3\sec^2\theta - 7$ ஐத் தீர்க்க.

10. ஒரு முக்கோணி ABC இல் $AB=x,\ BC=4-x,\ AC=x+1$ மற்றும் $B\hat{A}C=60^{\circ}$ ஆகும்.

   (a) $x=\frac{5}{3}$ எனக் காட்டுக.

   (b) இதிலிருந்து, முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவைக் காண்க.

பகுதி B

11. (a) $f(x)=ax^3-x^2-5x+3$ என்னும் பல்லுறுப்பிச் சார்பு $x+1$ ஆல் வகுக்கப்பட்டால், மீதி 5 ஆகும்.
   $x-2$ ஆல் வகுக்கப்படும் போது மீதியைக் காண்க. இதிலிருந்து ஒரு ஏகபரிமாணக் காரணிகளின் பெருக்கமாக $F(x)=f(x)-5$ ஐ வெளிப்படுத்துக.

   (b) $\frac{1}{(px+1)(qx+1)} = \frac{A}{px+1} + \frac{B}{qx+1}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது, இங்கு $p \neq q \neq 0$ என ஆகுமாறு p மற்றும் q ஆகியன இரண்டு மாறிலிகள் ஆகும். A மற்றும் B ஐத் தீர்க்காமல்,

   (i) $A+B=1$ மற்றும் $Aq+Bp=0$,

   (ii) $\frac{1}{(px+1)^2(qx+1)} = \frac{A}{(px+1)^2} + \frac{AB}{(px+1)} + \frac{B^2}{(qx+1)}$, என நிறுவுக.

12. (a) $x^2+bx+c=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β, மற்றும் சமன்பாடு $x^2+\lambda bx+\lambda^2 c=0$ இன் மூலங்கள் γ மற்றும் δ எனின், $(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)=2\lambda^2 c(b^2-2c)$ எனக் காட்டுக.

$\alpha\gamma+\beta\delta$ மற்றும் $\alpha\delta+\beta\gamma$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(b) ஒரே வரிப்படத்தில் $y=|x-1|$ மற்றும் $y=3-|x|$ இன் வரைபை வரைக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக, சமனிலி $|x-1|>3-|x|$ ஐத் திருப்திப்படுத்தும் x இன் பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

13. (a) ஒரு நிலைக்குத்து கோபுரம் ஆற்றங்கரை ஒன்றில் உள்ளது. நேர் எதிரே மற்றும் நீர் மட்டத்திற்கு மேலே h உயரத்தில் மறுகரையில் உள்ள ஒரு புள்ளியில் இருந்து, கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் α மற்றும் கோபுரத்தின் உச்சியின் பிரதிபலிப்பின் இறக்கக் கோணம் β ஆகும். நீர் ஒப்பமானது மற்றும் நீர் மேற்பரப்பில் உள்ள எந்தவொரு பொருளின் பிரதிபலிப்பும், அந்த பொருள் மேலே உள்ளதைப் போல, மேற்பரப்பிற்குக் கீழே இருப்பது போலவும் தோன்றும் எனவும் கருதுக.

நீருக்கு மேலுள்ள கோபுரத்தின் உச்சியின் உயரம் $h\sin(\alpha+\beta)\operatorname{cosec}(\beta-\alpha)$ மற்றும் ஆற்றின் அகலம் $2h\cos\alpha\cos\beta\operatorname{cosec}(\beta-\alpha)$ எனவும் நிறுவுக.

(b) (i) $t=\tan\frac{\theta}{2}$ எனின், $\tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}$, $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$ மற்றும் $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ எனக் காட்டுக.

(ii) $\tan\theta=\frac{24}{7}$ மற்றும் θ கூர்ங்கோணம் எனின், $\tan\frac{\theta}{2}$ வை கணிக்க.

14. (a) ஒரு முக்கோணி ABC இற்கு வழக்கமான குறியீட்டுடன், $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ எனக் காட்டுக.

நிறுவுக:

(i) $b\cos C+c\cos B=a$.

(ii) பரப்பளவு Δ வைக் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்திற்கு, $ab=2\Delta\operatorname{cosec} C$.

(iii) $a^2+b^2=c^2+4\Delta\cot C$.

(iv) ஒரு பக்கம் $5cm$ எதிர்க் கோணம் 45° மற்றும், பரப்பு $15cm^2$ ஆகவுள்ள ஒரு முக்கோணியின் மீதமுள்ள பக்கங்களைக் காண்க.

(b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ எனக் காட்டுக.

15. (a) (i) $f(x) = 5\sin x - 12\cos x$ ஐ $f(x) = R\sin(x - \alpha)$ என்னும் வடிவத்தில் வெளிப்படுத்துக, இங்கு $R > 0$ மற்றும் $0 < \alpha < 90^{\circ}$ ஆகும்.

(ii) $g(x) = \frac{4}{5\sin x - 12\cos x}$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(iii) சமன்பாடு $5\sin x - 12\cos x + 3 = 0$ ஐத் தீர்க்க.

(b) பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க

(i) $\sqrt{3}\sin 2x = \cos 2x$

(ii) $\sin 5\theta = \sin 2\theta + \sin\theta$

16. ஒரு முக்கோணி ABC இன் குத்துயரம் (உச்சியில் இருந்து எதிர்ப் பக்கமாக வரையப்பட்ட செங்குத்து கோடு) AD, BE, மற்றும் CF ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $x + y = 0$, $x - 4y = 0$ மற்றும் $2x - y = 0$ ஆகும். A யின் ஆள்கூறுகள் $(t, -t)$ எனின், B மற்றும் C இன் ஆள்கூறுகள் முறையே $\left(-\frac{2t}{3}, -\frac{t}{6}\right)$ மற்றும் $\left(\frac{t}{2}, t\right)$ எனக் காட்டுக.

மேலும் முக்கோணி ABC இன் மையப்போலியின் ஒழுக்கு $x + 5y = 0$ எனக் காட்டுக.

17. ஒரு இணைகரத்தின் இரண்டு பக்கங்கள் $y = x - 2$ மற்றும் $4y = x + 4$ ஆகிய சமன்பாடுகளால் தரப்பட்டுள்ளன. இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் உற்பத்தியில் இடைவெட்டுகின்றன.

(i) இணைகரத்தின் மீதமுள்ள பக்கங்களின் சமன்பாடுகள்,

(ii) அதன் மூலைவிட்டங்களின் சமன்பாடுகள், என்பவற்றைப் பெறுக.

மேலும், இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.