00193

ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය

විද්‍යා උසස් සහතික පත්‍ර පාඨමාලාව - දෙවන මට්ටම

අවසාන පරීක්ෂණ - 2023/2024

MYF2521/MHF2521 - සංයුක්ත ගණිතය III

කාලය: - පැය තුනයි.

දිනය :- 02-09-2023 වේලාව:-පෙ.ව.9.30- ප.ව.12.30

A කොටසේ **සියලුම** ප්‍රශ්න වලටද සහ B කොටසෙන් ප්‍රශ්න **පහකට පමණක්** පිළිතුරු සපයන්න.

A කොටස

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් $23^n - 1$ සියලු $n \in \mathbb{N}$ සඳහා, 11 න් බෙදිය හැකි බව සාධනය කරන්න.

2. $\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+1)^2} = \frac{2r+1}{r^2(r+1)^2}$ බව පෙන්වන්න. එනයින්, $\sum_{r=1}^{n} \frac{2r+1}{r^2(r+1)^2}$ අගයන්න.

3. පිරිමි ළමයින් 6 දෙනෙකු සහ ගැහැණු ළමයින් 9 දෙනෙකු අතරින් සිසුන් 5 දෙනෙකුගෙන් සමන්විත කමිටුවක් සැදිය යුතුව ඇත..

   (a) ගැහැණු ළමුන් හා පිරිමි ළමුන් තෝරා ගැනීම පිළිබඳ සීමාවක් නොමැති විට සැදිය හැකි කමිටු ගණන කීයද?

   (b) කමිටුවේ පිරිමි ළමුන් 3 ක් සහ ගැහැණු ළමයින් 2 ක් සිටින පරිදි සැදිය හැකි කමිටු ගණන කීයද?

   (c) කමිටුවේ පිරිමි ළමයින්ට වඩා ගැහැණු ළමයින් සිටින පරිදි සැදිය හැකි කමිටු ගණන කීයද?

4. ධන නිඛිල දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රසාරණය භාවිතා කිරීම මගින්, $\left(3+\sqrt{5}\right)^5 + \left(3-\sqrt{5}\right)^5$ යනු ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් බව පෙන්වන්න.

5.

   (a) $Arg(z-4) - Arg(z) = \frac{\pi}{3}$ යන සමීකරණයෙන් දැක්වෙන පථය විස්තර කරන්න.

   (b) $|z-2+i| = 3$ සමීකරණයෙන් දැක්වෙන පථයේ කාටිසියානු සමීකරණය සොයන්න.

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ සහ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, නම්, X, Y සහ Z න්‍යාස සොයන්න.

(a) $X = B^2 + 2A$.

(b) $AY = B$.

(c) $ZA = B$.

7. පහත සඳහන් සීමාවන් සොයන්න.

(a) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^4-16}{x^3+8}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 2x}$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3+3x^2-1}{3x^3+x+1}$

8. C වක්‍රයක් පරාමිතික සමිකරණය $x = \sec^3\theta$ සහ $y = \tan^3\theta$ මගින් දෙනු ලැබේ.

$\frac{dy}{dx} = \sin\theta$ බව පෙන්වන්න. $\theta = \frac{\pi}{4}$ පරාමිතියට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයේ ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න.

9. $y = (x-1)^2$ සහ $y = 2-(x-1)^2$ වක්‍රවලින් වට වූ වර්ගඵලය සොයන්න.

10. $C = x^2+y^2-10x \quad +4y+11 = 0$ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක සහ අරයේ සොයන්න.

k යනු නියතයක් වන $y = 3x + k$ රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ නම්, $k = -17 \pm 6\sqrt{5}$ බව පෙන්වන්න.

B කොටස

11.

(a) $\frac{2r-1}{r(r-1)} - \frac{2r+1}{r(r+1)} = \frac{2}{(r-1)(r+1)}$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{(r-1)(r+1)} = \frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)}$ බව සාධනය කරන්න.

මෙම ශ්‍රේණියේ පද අනන්තය දක්වා එකතුව සොයා, ශ්‍රේණිය අභිසාරීද නැද්ද යන වග ප්‍රකාශ කරන්න.

(b) $x + \frac{1}{x} = 1$ නම් $x^5 + \frac{1}{x^5}$ සහ $x^7 + \frac{1}{x^7}$ හි අගයන් සොයන්න.

12.

(a) අර්ගන්ඩ් රූප සටහනේ $z_1 = \frac{5-10i}{2-i}$ සහ $z_2 = -5i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා A සහ B ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කෙරේ. O යනු මූල ලක්ෂයයි.

i. අර්ගන්ඩ් රූප සටහනේ z_1 සහ z_2 ලකුණු කරන්න.

ii. OA, OB සහ AB වල දිග සොයන්න.

iii. $OAB\Delta$ සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව ඔප්පු කරන්න.

iv. $A\hat{O}B$ කෝණය සොයන්න.

(b) n හි ධන අගයන් සඳහා, $z = \cos\theta + i\sin\theta$ නම්, $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$ සහ $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්

$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ සහ

$\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\,\text{sins}^3\,\theta + 5\sin\theta$ බව පෙන්වන්න.

13.

(a) පහත සඳහන් ශ්‍රිත x විශයෙන් අවකලනය කරන්න.

i. $y = (2x^2+1)(3x^3+7x^2+2)$

ii. $y = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos x + \sin x x}}$

iii. $y = \ln[\sec 3x + \tan 3x]$

iv. $y = (\cos x)^{\sin x}$

(b) $x = e^t\sin t$ සහ $y = e^t\cos t$ නම්, $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$ බව පෙන්වන්න.

14.

(a) $y = \frac{x-1}{(x-2)(x+3)}$ ශ්‍රිතයේ ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය සොයා ඒවායේ අවම අගයන් සහ උපරිම අගයන් හි ස්වභාවය නිර්ණය කරන්න. එනයින් ඉහත ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්ථාරය අඳින්න.

(b) අරය R ගෝලයක් අර්ධ සිරස් කෝණය θ වූ සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක අභ්‍යන්තර පෘෂ්ඨ ස්පර්ශ වන පරිදි පිහිටයි නම් කේතුවේ පරිමාව $V = \frac{1}{3}\pi R^3(1+\operatorname{cosec}\theta)^3\tan^2\theta$ බව පෙන්වන්න. V හි අගය අවම වන පරිදි θ හි අගය සොයන්න.

00193

15.

(a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} dx$ බව ඔප්පු කරන්න.

එනයින්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} dx$ අගයන්න.

(b) පහත ශ්‍රිත අනුකලනය කරන්න.

i. $\int \frac{2x+4}{(x-2)(x^2+4)} dx$

ii. $\int \frac{(\tan^{-1} x)^3}{1+x^2} dx$

iii. $\int e^x \cos x \, dx$

16.

(a) $y = x^2$ වක්‍රයේ $1 \leq x \leq 2$ අතර පිහිටි වර්ගඵල x අක්ෂය වටා සෘජු කෝණ හතරකින් භ්‍රමණය කල විට ජනනය වන පරිමාව සොයන්න.

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ නම්,

i. A^2 සොයන්න.

ii. $A^2 = aA + bI$ නම් a සහ b හි අගය සොයන්න.

iii. A^{-1} සොයන්න.

17. $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ සහ $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ යන වෘත්ත ප්‍රලම්භව ඡේදනය වේ නම් $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$ බව පෙන්වන්න.

$S_1 = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$ සහ $S_2 = x^2 + y^2 - 5x - 8y + 3 = 0$ යැයි ගනිමු.

S_1 සහ S_2 වෘත්ත දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂය හරහා සහ මූල ලක්ෂය හරහා යන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. මෙම වෘත්තය $S_1 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්භව ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න.