00082

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்

கணிதத் திணைக்களம்

விஞ்ஞானத்தில் உயர்சான்றிதழ்

MYF 2521/MHF 2521 – இணைந்த கணிதம் 3 – மட்டம் 2

இறுதிப் பரீட்சை **2023/24**

திகதி: **02-09-2023** நேரம்: மு.ப. **09.30** இலிருந்து பி.ப. **12.30** வரை

பகுதி **A** இல் **அனைத்து** வினாக்களுக்கும் மற்றும் பகுதி **B** இல் **ஐந்து** வினாக்களுக்கும் விடையளிக்குக.

பகுதி A

1. கணித தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, அனைத்து நேர் முழுவெண்கள் n இற்கும் $23^n - 1$ என்பது 11 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

2. $\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+1)^2} = \frac{2r+1}{r^2(r+1)^2}$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} \frac{2r+1}{r^2(r+1)^2}$ ஐக் காண்க.

3. 6 ஆண் பிள்ளைகள் மற்றும் 9 பெண் பிள்ளைகளில் இருந்து 5 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு குழு தேர்வு செய்யப்படவுள்ளது. இதை செய்ய முடியுமான வழிகளின் எண்ணிக்கையை பின்வரும் சந்தர்ப்பங்களில் காண்க.

   a) குழுவிற்கு மாணவர்களை தேர்ந்தெடுப்பதில் எந்த கட்டுப்பாடும் இல்லை.

   b) குழுவில் 3 ஆண் பிள்ளைகளும் மற்றும் 2 பெண் பிள்ளைகளும் கட்டாயம் உள்ளடக்கப்பட வேண்டும்.

   c) குழுவில் ஆண் பிள்ளைகளை விட பெண் பிள்ளைகள் அதிகமாக இருக்க வேண்டும்.

4. ஒரு நேர் முழுவெண் சுட்டியிற்கு ஈறுருப்பு விரிவை பயன்படுத்தி, $(3+\sqrt{5})^5 + (3-\sqrt{5})^5$ என்பது ஒரு இரட்டை எண் எனக் காட்டுக.

5. (a) $Arg(z-4) - Arg(z) = \frac{\pi}{3}$ என்னும் சிக்கற் சமன்பாடு மூலம் குறிப்பிடப்படும் ஒழுக்கை விபரிக்க.

   (b) $|z - 2 + i| = 3$ என்னும் சிக்கலெண் சமன்பாட்டிற்கு ஒத்த தெக்காட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ எனின்,

   (a) $X = B^2 + 2A$,

   (b) $AY = B$,

   (c) $ZA = B$, என ஆகுமாறு தாயங்கள் X, Y மற்றும் Z ஐக் காண்க.

7. பின்வரும் எல்லைகளை மதிப்பிடுக.

(a) $\lim_{x\to -2} \frac{x^4-16}{x^3+8}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 2x}$

(c) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3+3x^2-1}{3x^3+x+1}$

8. ஒரு வளையி C ஆனது $x = \sec^3\theta$ மற்றும் $y = \tan^3\theta$ என்னும் பரமானச் சமன்பாடுகளால் தரப்படுகின்றது.
$\frac{dy}{dx} = \sin\theta$ எனக் காட்டுக. பரமானம் $\theta = \frac{\pi}{4}$ வுடன் தொடர்புடைய புள்ளியில் தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

9. $y = (x-1)^2$ மற்றும் $y = 2-(x-1)^2$ என்னும் வளையிகளால் உள்ளடக்கப்பட்ட செவ்வக தெக்காட்டின் தளத்தில் உள்ள பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

10. வட்டம் C ஆனது சமன்பாடு $x^2+y^2-10x+4y+11=0$, ஐக் கொண்டுள்ளது. C இன் மையத்தின் ஆள்கூறுகள் மற்றும் ஆரை என்பவற்றைக் கான்க. $y = 3x+k$ என்னும் கோடு வட்டத்தின் ஒரு தொடலி எனத் தரப்பட்டுள்ளது, இங்கு k ஒரு மாறிலி ஆகும்.
$k = -17 \pm 6\sqrt{5}$ எனக் காட்டுக.

பகுதி B

11. (a) $\frac{2r-1}{r(r-1)} - \frac{2r+1}{r(r+1)} = \frac{2}{(r-1)(r+1)}$ என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

இதிலிருந்து, வித்தியாச முறையை பயன்படுத்தி $\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{(r-1)(r+1)} = \frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)}$ என நிறுவுக. இத் தொடரின் முடிவிலியின் கூட்டுத்தொகையை கான்க மற்றும் தொடர் ஒருங்குமா என்பதைக் காண்க.

(b) $x + \frac{1}{x} = 1$ எனின்,

(i) $x^5 + \frac{1}{x^5}$ மற்றும்

(ii) $x^7 + \frac{1}{x^7}$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

12. (a) சிக்கலெண்கள் $z_1 = \frac{5-10i}{2-i}$ மற்றும் $z_2 = -5i$ என்பன ஆகன் வரிப்படத்தில் A மற்றும் B புள்ளிகளால் வகைக்குறிக்கப்படுகின்றன. இங்கு புள்ளி O உற்பத்தியைக் குறிக்கிறது.

(i) z_1 மற்றும் z_2 வை ஆகன் வரிப்படத்தில் குறிக்க.

(ii) OA, OB மற்றும் AB இன் நீளங்களைக் காண்க.

(iii) முக்கோணி OAB, இருசமபக்க முக்கோணி என நிறுவுக.

(iv) கோணம் AOB ஐக் காண்க.

(b) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ எனின், n இன் நேர்ப் பெறுமானங்களுக்கு, $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$ மற்றும் $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து,

$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ மற்றும்

$\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\,\text{sins}^3\,\theta + 5\sin\theta$ எனக் காட்டுக.

13. (a) பின்வரும் சார்புகளை x குறித்து வகையிடுக.

(i) $y = (2x^2+1)(3x^3+7x^2+2)$

(ii) $y = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos x + \sin xx}}$

(iii) $y = \ln[\sec 3x + \tan 3x]$

(iv) $y = (\cos x)^{\sin x}$

(b) $x = e^t\sin t$ மற்றும் $y = e^t\cos t$ எனின், $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$ எனக் காட்டுக.

14. (a) வளையி $y = \frac{x-1}{(x-2)(x+3)}$ இன் திரும்பற்புள்ளிகளைக் காண்க மற்றும் அவை தொடர்பு உயர்வுப் புள்ளிகளா, தொடர்பு இழிவுப் புள்ளிகளா அல்லது விபத்திப் புள்ளிகளா எனத் துணிக

இதிலிருந்து, சார்பின் வரைபை வரைக.

(b) அரை உச்சிக்கோணம் θ வை உடைய ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பு R ஆரை உடைய ஒரு கோளத்தை சுற்றிவரையப்படுகிறது. கூம்பின் கனவளவு $V = \frac{1}{3}\pi R^3(1+\operatorname{cosec}\theta)^3\tan^2\theta$ எனக் காட்டுக. V இழிவாக இருக்கும் போது θ வின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

15. (a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} dx$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} dx$ ஐ மதிப்பிடுக.

(b) பின்வரும் தொகையீடுகளை மதிப்பிடுக

(i) $\int \frac{2x+4}{(x-2)(x^2+4)} dx$

(ii) $\int \frac{(\tan^{-1} x)^3}{1+x^2} dx$

(iii) $\int e^x \cos x \, dx$

16. (a) வளையி $y = x^2$ இன் பகுதி $1 \leq x \leq 2$ என்னும் ஆயிடையில் x–அச்சு பற்றி நான்கு செங்கோணங்களாக சுழற்றப்படும் போது பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவைக் காண்க.

(b) தாயம் A ஆனது $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ எனத் தரப்படுகிறது.

(i) A^2 ஐ காண்க.

(ii) $A^2 = aA + bI$ என ஆகுமாறு a மற்றும் b ஐ காண்க.

(iii) A^{-1} ஐ காண்க.

17. வட்டங்கள் $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ மற்றும் $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ நிமிர்கோணமாக இடைவெட்டும் எனின், $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$ எனக் காட்டுக.

$S_1 = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$ மற்றும் $S_2 = x^2 + y^2 - 5x - 8y + 3 = 0$ என்க.

உற்பத்தியின் ஊடாகவும் மற்றும், S_1 மற்றும் S_2 ஆகிய இரண்டு வட்டங்களின் இடைவெட்டுப் புள்ளிகள் வழியாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இவ் வட்டம் தரப்பட்ட வட்டம் S_1 ஐ நிமிர்கோணமாக இடைவெட்டுகிறது எனக் காட்டுக.