ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්ව විද්‍යාලය
විද්‍යා උසස් සහතික පත්‍ර පාඨමාලාව – 02 මට්ටම
අවසාන පරීක්ෂණය- 2024/2025
MYF2521 - සංයුක්ත ගණිතය 3
කාලය: - කාලය පැය තුනයි

දිනය : 13-10-2024 | **කාලය: පෙ.ව 09.30 සිට ප.ව 12.30 දක්වා**

A කොටසේ සියලුම ප්‍රශ්න සඳහා ද, B කොටසෙන් තෝරාගත් ප්‍රශ්න පහක් සඳහා ද පිළිතුරු සපයන්න.

A කොටස

1. සියලු $n\epsilon\mathbb{N}$ සඳහා, $9^n - 4^n$, 5 බෙදෙන බව ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය ඇසුරින් සාධනය කරන්න.

2. $3, 6, 12, 24, 48, \cdots\cdots, 3072,$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියේ පද ගණන කොපමණ ද?

3. $\left(2x^3 + \frac{1}{15x}\right)^{15}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^{41} හි සංගුණකය සොයන්න.

4. පිරිමි 6 දෙනෙක් සහ ගැහැණු 4 දෙනෙක් ඇතුළත් කණ්ඩායමකින් 8 දෙනෙකු ඇතුළත් කමිටුවක් සකස් කළ යුතුව ඇත.
   (a) සෑදිය හැකි කමිටු ගණන කොපමණ ද?
   (b) පිරිමි 4 දෙනෙක් සහ ගැහැණු 4 දෙනෙක් ඇතුළත් කමිටු ගණන කොපමණ ද?

5. $z = 1 + i$, සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව මාපාංකය සහ විස්තාරය ඇසුරින් (ධ්‍රැවක ආකාරයෙන්) ප්‍රකාශ කරන්න. එමගින්, z^8 කාටීසියානු ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

6. $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ සහ $Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$ නම් PQ සොයන්න. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ නම් එවිට $A = PQ - R$ වන පරිදි A න්‍යාසය සොයන්න.

7. පහත දැක්වෙන සීමා අගයන්න.

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{2x^2-x+3}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 9x}$

8. t යනු පරාමිතියක් වනවිට $x = t + \ln t$ සහ $y = t - \ln t$ මගින් දෙනු ලැබේ. $\frac{dy}{dx}$ හි අගය $(1,\ 1)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී සොයන්න.

9. $\int_0^1 e^{4x}dx = \frac{1}{4}(e^4 - 1)$ බව පෙන්වන්න.

10. $S \equiv x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ මගින් වෘත්තයක් නිරූපණය කරයි. එම වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය සහ අරය සොයා $(1, 1)$ ලක්ෂ්‍යය වෘත්තය මත පවතින බව පෙන්වන්න.

PART B

11. $U_r = \frac{1}{(r+2)(r+3)}$ යැයි ගනිමු. $U_r = \frac{A}{(r+2)} + \frac{B}{(r+3)}$ වන පරිදි A සහ B තාත්වික නියත නිර්ණය කරන්න.

එමගින්, $U_r = f(r) - f(r+1)$ **වන පරිදි** $f(r)$ **නිර්ණය කරන්න.**
$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{3} - \frac{1}{(n+3)}$ බව පෙන්වන්න.

අනන්ත ශ්‍රේණිය $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී බව අපෝහනය කරන්න. එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

12. (a) A න්‍යාසය, $A = \begin{pmatrix} a & -5 \\ 1 & a+4 \end{pmatrix}$ මගින් දෙනු ලැබේ. සියලු $a \epsilon \mathbb{R}$ සඳහා A^{-1} පවතින බව සාධනය කරන්න.

(b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ සහ $R = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ න්‍යාස $A = PQ + R$ වන

පරිදි වේ. $a = 2$ බව පෙන්වන්න.

(c) A^{-1} සොයන්න. **එමගින්,** පහත දැක්වෙන සමගාමී සමීකරණ විසඳන්න.

$$2x - 5y = 8 \text{ සහ}$$
$$x + 6y = 13$$

13. (a) z සහ w යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යා වන අතර $\bar{z}$ සහ $\bar{w}$ යනු පිළිවෙලින් z සහ w හි ප්‍රතිබද්ධ සංකීර්ණ. සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි.

(i) $|z|^2 = z\bar{z}$, $|z| = |\bar{z}|$ සහ $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ බව ද,

(ii) $z\bar{w} + w\bar{z} = 2\text{Re}(z\bar{w})$ බව ද පෙන්වන්න.

එමගින්, $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$ බව පෙන්වන්න.

(iii) එලෙසම $|z-w|^2$ සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වන්න.

තවද. $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ අපෝහනය කරන්න.

(b) (i) $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$ යැයි ගනිමු. z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව මාපාංකය සහ විස්තාරය ඇසුරින් (ධ්‍රැවක ආකාරයෙන්) ප්‍රකාශ කරන්න. $|z|$ and $Arg\ z$ සොයන්න.

(ii) $w = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$ යැයි ගනිමු. $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 4$ බව පෙන්වන්න.

14. (a) පහත දැ ක්වෙන ශ්‍රිත x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

(i) $y = (2x+1)^2(x^2+1)^3$

(ii) $y = \sqrt{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}}$

(iii) $y = \ln|e^x + e^{-x}|$

(iv) $y = (x^2+1)^{\tan^{-1} x}$

(b) දී ඇති තුනී ඒකාකාර තහඩුවකින් විවෘත සිලින්ඩරාකාර භාජනයක් සෑදිය යුතුය. මෙම භාජනය සෑදිමට අවශ්‍ය තහඩු ප්‍රමාණය අවම වන්නේ භාජනයේ අරය එහි උසට සමාන වන විට බව පෙන්වන්න.

15. (a) $f(x) = \frac{(x-1)(2x-5)}{(x-4)^2}, x \neq 4$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ හි අවකලන සංගුණකය

$f'(x) = \frac{9(2-x)}{(x-4)^3}$, $x \neq 4$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

එමගින්, $f(x)$ වැඩිවන සහ $f(x)$ අඩුවන පන්ති ප්‍රාන්තර සොයන්න. තිරස් සහ සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ සොයන්න. $f(x)$ හි හැරවුම් ලක්ෂ්‍ය සොයා $f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

(b) $y^2 = 4(x-1)$ වක්‍රයේ $0 \leq y \leq 2$ පරාසයේ පිහිටි කොටස y-අක්ෂය වටා සෘජු කෝණ හතරකින් භ්‍රමණය කළ විට ජනනය වන පරිමාව සොයන්න.

16. (a) $\frac{x-2}{(x-1)(x-4)}$ පරිමේය ශ්‍රිතය භින්න භාග ඇසුරින් ප්‍රකාශ කරන්න.

එමගින්. $\int \frac{x-2}{(x-1)(x-4)} dx$ අගයන්න..

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int_0^1 \; x \tan^{-1} x \, dx = \frac{1}{4}(\pi - 2)$.
බව පෙන්වන්න.

(c) $y = 2x - x^2$, වක්‍රයෙන් ද $x = 0$, $x = 1$ සහ $y = 0$ සරල රේඛා මගින් පර්යන්ත ගත වර්ගඵලය $^2/_3$ බව පෙන්වන්න.

17. $S_1 \equiv x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ සහ $S_2 \equiv x^2 + y^2 + {}^3/_2 x + 3y - 1 = 0$ මගින් නිරූපිත වෘත්ත දෙක සලකමු. S_1 සහ S_2 හි කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක සහ අරය සොයන්න. $(2,\ 0)$ ලක්ෂ්‍යය S_2 වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.
වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බව ඡේදනය වන බව සාධනය කරන්න.
වෘත්ත දෙකේ ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා ද, මූල ලක්ෂය හරහා ද යන්න වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.