084

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
கணிதத் திணைக்களம்
விஞ்ஞானத்தில் உயர்சான்றிதழ் பாடநெறி
MYF2521 – இணைந்த கணிதம் 3 – மட்டம் 2
இறுதிப் பரீட்சை **2024/2025**

திகதி: 13-10-2024 முப. **09.30** இலிருந்து பிப. **12.30** வரை

பகுதி A இல் **அனைத்து** வினாக்களுக்கும் மற்றும் **பகுதி B** இல் **ஐந்து** வினாக்களுக்கும் விடையளிக்குக.

பகுதி A

1. **கணித தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப்** பயன்படுத்தி, அனைத்து நேர் முழு எண்கள் n இற்கும் $9^n - 4^n$ என்பது 5 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

2. பெருக்கல் விருத்தி $3, 6, 12, 24, 48, \dots, 3072$ இல் எத்தனை உறுப்புக்கள் உள்ளன?

3. $\left(2x^3 + \frac{1}{15x}\right)^{15}$ இன் ஈருறுப்பு விரிவில் x^{41} இன் குணகத்தைக் காண்க.

4. 6 ஆண்கள் மற்றும் 5 பெண்கள் கொண்ட ஒரு குழுவில் இருந்து 8 உறுப்பினர்களைக் கொண்ட ஒரு செயற்குழு அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

   (a) எத்தனை செயற்குழுக்களை அமைக்கலாம்.

   (b) எத்தனை செயற்குழுக்கள் 4 ஆண்கள் மற்றும் 4 பெண்களை கொண்டிருக்கும்.

5. சிக்கலெண் z, $z = 1 + i$ ஐ மட்டு மற்றும் வீசல் வடிவத்தில் வெளிப்படுத்துக. இதிலிருந்து z^8 ஐ தெக்காட்டின் வடிவத்தில் காண்க.

6. $P = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ மற்றும் $Q = \begin{pmatrix}4 & 2\end{pmatrix}$ எனின், PQ ஐ காண்க. $R = \begin{pmatrix}1 & 1\\5 & 1\end{pmatrix}$ எனின், A ஐ காண்க, இங்கு $A = PQ - R$ ஆகும்.

7. பின்வரும் எல்லைகளைத் துணிக.

   (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{2x^2-x+3}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 9x}$

8. $x = t + \ln t$ மற்றும் $y = t - \ln t$, என்க, t ஒரு பரமானம் ஆகும். புள்ளி $(1,\ 1)$ இல் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

9. $\int_0^1 e^{4x}dx = \frac{1}{4}(e^x - 1)$ எனக் காட்டுக.

10. S என்பது $S \equiv x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ ஆல் வரையறுக்கப்பட்ட வட்டம் என்க.

    வட்டத்தின் மையம் மற்றும் ஆரையைக் காண்க, மற்றும் புள்ளி $(1,\ 1)$ வட்டத்தின் மீது இருக்கும் எனக் காட்டுக.

பகுதி B

11. $U_r = \frac{1}{(r+2)(r+3)}$ என்க. $U_r = \frac{A}{(r+2)} + \frac{B}{(r+3)}$ என ஆகுமாறு மெய் மாறிலிகள் A மற்றும் B இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $U_r = f(r) - f(r+1)$ என ஆகுமாறு $f(r)$ ஐ காண்க.

$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{3} - \frac{1}{(n+3)}$ எனக் காட்டுக.

முடிவிலித் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்கும் என ஊய்த்தறிக மற்றும் அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

12. (a) தாயம் A ஆனது $A = \begin{pmatrix} a & -5 \\ 1 & a+4 \end{pmatrix}$ இனால் தரப்படுகிறது. அனைத்து $a \in \mathbb{R}$ இற்கும் A^{-1} இருக்கும் எனக் காட்டுக.

(b) $A = PQ + R$ என ஆகுமாறு $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ மற்றும் $R = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ஆகிய தாயங்கள் உள்ளன. $a = 2$ எனக் காட்டுக.

(c) A^{-1} ஐ காண்க. இதிலிருந்து, பின்வரும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை தீர்க்க.

$2x - 5y = 8$ மற்றும்
$x + 6y = 13$

13. (a) z, w சிக்கலெண்கள் என்க மற்றும் $\bar{z}$ மற்றும் $\bar{w}$ என்பன முறையை z மற்றும் w வின் உடண்புணரிகள் என்க.

(i) $|z|^2 = z\bar{z}$, $|z| = |\bar{z}|$ மற்றும் $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ எனக் காட்டுக.

(ii) $z\bar{w} + w\bar{z} = 2\mathrm{Re}(z\bar{w})$.

இதிலிருந்து, $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$ எனக் காட்டுக.

(iii) இதேபோல் $|z-w|^2$ இற்கான கோவையை எழுதுக.

$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ ஐ ஊய்த்தறிக.

(b) (i) $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$ என்க. z ஐ மட்டு மற்றும் வீசல் வடிவத்தில் எழுதுக. $|z|$ மற்றும் $Arg\, z$ ஐ காண்க.

(ii) $w = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$ என்க. $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 4$ எனக் காட்டுக.

14. (a) பின்வரும் சார்புகளை x குறித்து வகையிடுக.

(i) $y = (2x+1)^2(x^2+1)^3$

(ii) $y = \sqrt{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}}$

(iii) $y = \ln|e^x + e^{-x}|$

(iv) $y = (x^2+1)^{\tan^{-1} x}$

(b) தரப்பட்ட ஒரு சீரான மெல்லிய பொருளின் குறிப்பிட்ட அளவில் இருந்து, ஒரு திறந்த உருளைப் பாத்திரம் செய்யப்பட உள்ளது. இந்த பாத்திரத்தின் ஆரை மற்றும் உயரம் சமமாக இருக்கும் போது, குறைந்தபட்ச அளவிலான பொருளைப் பயன்படுத்தி இந்த பாத்திரத்தை உருவாக்க முடியம் எனக் காட்டுக.

15. (a) $f(x) = \frac{(x-1)(2x-5)}{(x-4)^2}, x \neq 4$ என்க. $f(x)$ இன் வகையிடு $f'(x)$, $x \neq 4$ இற்கு

$f'(x) = \frac{9(2-x)}{(x-4)^3}$ இனால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கும் மற்றும் $f(x)$ குறைவடையும் ஆயிடையைக் காண்க. $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளிகள், நிலைக்குத்து மற்றும் கிடை அணுகுகோடுகள் என்பவற்றைக் காண்க மற்றும் $f(x)$ இன் வரைபை வரைக.

(b) $0 \leq y \leq 2$ வீச்சில் உள்ள வளையி $y^2 = 4(x-1)$ இன் பகுதியை y-அச்சு பற்றி நான்கு செங்கோணங்களில் சுழற்றும்போது உருவாகும் கனவளவைக் காண்க.

16. (a) $\frac{x-2}{(x-1)(x-4)}$ ஐ பகுதிப் பின்னங்களாக வெளிப்படுத்துக மற்றும் இதிலிருந்து $\int \frac{x-2}{(x-1)(x-4)}\,dx$ ஐ துணிக.

(b) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி, $\int_0^1 x \tan^{-1} x\, dx = \frac{1}{4}(\pi - 2)$ எனக் காட்டுக.

(c) வளையிகள் $y = 2x - x^2$, $x = 0$, $x = 1$ மற்றும் $y = 0$ என்பவற்றால் உள்ளடைக்கப்பட்ட பகுதியின் பரப்பளவு ${}^2/_3$ எனக் காட்டுக.

17. S_1 மற்றும் S_2 வட்டங்களைக் கருதுக, இங்கு

$S_1 \equiv x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ மற்றும்

$S_2 \equiv x^2 + y^2 + {}^3/_2 x + 3y - 1 = 0$ ஆகும்.

வட்டங்கள் S_1 மற்றும் S_2 வின் மையம் மற்றும் ஆரையை எழுதுக. புள்ளி $(2, 0)$ வட்டம் S_2 வின் மீது இருக்கும் எனக் காட்டுக. இரண்டு வட்டங்களும் செங்கோணத்தில் இடைவெட்டும் எனக் காட்டுக.

மையம் மற்றும் இரண்டு வட்டங்கள் S_1 மற்றும் S_2 இடைவெட்டும் புள்ளிகளின் ஊடாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.