205

ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය - 2023/2024
ශුද්ධ ගණිතය - තුන්වන මට්ටම
PEU3202/PEE3202 – දෛශික අවකාශ

කාලය පැය දෙකයි.

දිනය : - 02-04-2024 **වේලාව : 9.30 a.m. - 11.30 a.m.**

ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1.

(a) V යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයකි.

(i) සියලුම $x \in V$ සහ $0 \in F$ සඳහා $0 \cdot x = 0$

(ii) සියලුම $\alpha \in F$ සහ $0 \in V$ සඳහා $\alpha \cdot 0 = 0$

(iii) සියලුම $\alpha \in F$ සහ $x \in V$ සඳහා $(-\alpha)x = -(\alpha x)$

බව සාධනය කරන්න.

(b) $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ ලෙස ගනිමු. ඕනෑම $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M$ සහ $\alpha \in \mathbb{R}$ සඳහා;

$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$ සහ $\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ 2\alpha c_1 & 3\alpha d_1 \end{bmatrix}$ මඟින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ. $\mathbb{R}$ යනු තාත්වික සංඛ්‍යා ක්ෂේත්‍රය වේ. ඉහත අර්ථ දැක්වීම් යටතේ M යනු තාත්වික සංඛ්‍යා ක්ෂේත්‍රය මත දෛශික අවකාශයක්ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(c) $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ $\mathbb{R}^3$ දෛශික අවකාශයෙහි දෛශික $(1, 2, 2), (1, -1, 2)\ (1, 0, 1)$ ඒකජව ස්වායත්ත ද යන්න සොයා බලන්න.

2.

(a) V යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයකි. $W \subseteq V$ සහ $W \neq \phi$ වේ. $\alpha, \beta \in F$ සහ $x, y \in W$ සඳහා $\alpha x + \beta y \in W$ **වේ නම් හා නම්ම පමණක්** W යනු V හි උප අවකාශයක් බව සාධනය කරන්න.

(b) පහත දැක්වෙන කුලක $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ $\mathbb{R}^4$ දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශ **වේ දැයි** සොයා බලන්න. ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(i) $A = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R};\ b = 2a + a^2 \ and \ c = d\}$

(ii) $B = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R};\ a + b = c + d\}$

(c) α, β සහ γ යනු $\boldsymbol{F}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ V දෛශික අවකාශයෙහි ඒකජව ස්වායත්ත දෛශික **නම්**, $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ දෛශික ද ඒකජව ස්වායත්ත දෛශික බව සාධනය කරන්න.

3.

(a) $\boldsymbol{V}$ යනු $\boldsymbol{F}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයකි. $\beta \in V$ යනු $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in V$ දෛශිකයන්හි ඒකජ සංයෝජනයක් නම් $\{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ කුලකය ඒකජව පරායත්ත බව පෙන්වන්න.

(b) V යනු $\boldsymbol{F}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ පරිමිත මාන දෛශික අවකාශයකි. W යනු V හි උප අවකාශයක් වේ. $\dim W \leq \dim V$ බව සාධනය කරන්න.

(c) $T_1 : U \to V$ සහ $T_2 : V \to W$ යනු $\boldsymbol{F}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ ඒකජ පරිනාමණ දෙකකි . $T_2 \circ T_1 : U \to W$ යන සංයුක්ත ශ්‍රිතය ඒකජ පරිනාමණයක් බව පෙන්වන්න.

4.

(a) $T : V \to W$ යනු ඒකජ පරිනාමණයකි. V සහ W යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශවේ.

(i) $T(0) = 0$ බව පෙන්වන්න.

(ii) T හි මදය $= \{0\}$ නම් හා නම්ම පමනක් T එකට එක බව පෙන්වන්න.

(b) $V = \mathbb{R}^3$ සහ $W = \mathbb{R}^2$ ලෙස ගනිමු. V සහ W සුපුරුදු එකතුව සහ අදිශ ගුණිතය යටතේ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශ වේ.

$T : V \to W$ යනු $T(x,y,z) = (x+y, x+2z)$ මගින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ.

(i) T ඒකජ පරිනාමණයක් බව පෙන්වන්න.

(ii) T හි මදය සොයන්න.

(iii) T යනු සමරූපීතාවයක්ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

5.

(a) $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ ලෙස ගනිමු. . M යනු සුපුරුදු න්‍යාස එකතුව සහ අදිශ ගුණිතය යටතේ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයක් වේ.

$T : M \to M$ යනු $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & b \\ 3c & d \end{bmatrix}$ මගින් අර්ථ දක්වන ඒකජ පරිනාමණය වේ.

පහත දැක්වෙන කුලක අතරින් කවරක් T යටතේ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ M දෛශික අවකාශයේ අච්චලක උප අවකාශයක් වේද යන්න සොයන්න.

(i) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$

(ii) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

(b)

(i) අන්තර් ගුණිත අවකාශය අර්ථ දක්වන්න .

(ii) V යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ අන්තර් ගුණිත අවකාශයකි $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathrm{V}$ සඳහා,

$$< x_1 + x_2, y_1 + y_2 > = < x_1, y_1 > + < x_1, y_2 > + < x_2, y_1 > + < x_2, y_2 >$$

බව සාධනය කරන්න.

(iii) $u = (x_1, x_2, x_3),\ v = (y_1, y_2, y_3)$ ලෙස ගනිමු. $u, v \in \mathbb{R}^3$.

$< u, v > = x_1^{\,2} y_1^{\,2} + x_2^{\,2} y_2^{\,2} + x_3 y_3$ මගින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ.$< u, v >$ යනු $\mathbb{R}^3$ මත වූ අන්තර් ගුණිත අවකාශයක්ද? ඔබේ පිළිතුර සනාත කරන්න.

6.

(a) U යනු $\boldsymbol{V}$ යන $\boldsymbol{F}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශයකි. $T : U \to V$ යනු ඒකජ පරිනාමණයකි. Ker T = $\{0\}$වේ. $S = \{ u_1, u_2, \ldots u_n \}$ යනු U තුල ඒකජව ස්වායත්ත දෛශික කුලකයකි. $T(S) = \{ T(u_i) | \, u_i \in S \}$ කුලකය ඒකජව ස්වායත්තද? ඔබේ පිළිතුර සනාත කරන්න.

(b) $W = \{(1, 1, -2, 0), (2, 1, -3, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 1, --1, 0)\}$ වේ. $\mathbb{R}^4$ හි $Sp<W>$ උප අවකාශය සඳහා පදනමක් සොයන්න.

(c) $u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (1, -1, 2)$ සහ $u_3 = (1, 0, 1)$ යන දෛශික සුපුරුදු යුක්ලීඩීය දෛශික අවකාශයෙහි පදනමක් බව පෙන්වන්න. the Gram–Schmidt ප්‍රාභිලම්භ ක්‍රියාවලිය මගින් $\{u_1, u_2, u_3\}$, E^3 හි ප්‍රාභිලම්භ පදනමක් බවට පරිනාමණය කරන්න.