102

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்

விஞ்ஞான இளமாணி/ கல்வி இளமாணி பட்டப்படிப்பு, தொடர் கல்வி கற்கைநெறி

இறுதிப் பரீட்சை 2023/2024

மட்டம் 03 தூய கணிதம்

PEU3202 காவி வெளிகள்

காலம்: - இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

திகதி: - 02-04-2024 நேரம்: மு.ப. **9.30** – மு.ப. **11.30**

நான்கு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்கவும்.

1.

(a) F என்னும் ஒரு புலத்தின் மேல் V ஒரு காவி வெளி என்க.

(i) எல்லா $x \in V$ மற்றும் $0 \in F$ இற்கும் $0 \cdot x = 0$ ஆகும்,

(ii) எல்லா $\alpha \in F$ மற்றும் $0 \in V$ இற்கும் $\alpha \cdot 0 = 0$ ஆகும்,

(iii) எல்லா $\alpha \in F$ மற்றும் $x \in V$ இற்கும் $(-\alpha)x = -(\alpha x)$ ஆகும்,

என நிறுவுக.

(b) $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ என்க. அனைத்து $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M$ இற்கும், $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$ மற்றும் $\alpha \in \mathbb{R}$ இற்கு $\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ 2\alpha c_1 & 3\alpha d_1 \end{bmatrix}$ என வரையறுக்கப்படுகின்றன, இங்கு $\mathbb{R}$ ஒரு மெய் எண் புலம் ஆகும். இந்த செய்கைகளின் கீழ் மெய் எண்களினுடைய புலத்தின் மேல் M ஒரு காவி வெளியா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(c) $(1,2,2), (1,-1,2), (1,0,1)$ ஆகிய மூன்று காவிகளும் $\mathbb{R}$ இன் மேல் வழமையான காவி வெளி $\mathbb{R}^3$ இன் மீது ஏகபரிமாணமுறையாய்ச் சாராதவையா எனத் துணிக.

2.

(a) F என்னும் ஒரு புலத்தின் மேல் V ஒரு காவி வெளி மற்றும் $W \subseteq V$ மற்றும் $W \neq \emptyset$ என்க. F இன் மேல் W என்பது ஒரு காவி வெளி V இன் ஒரு உபவெளி என்றால் என்றால் மட்டும் எல்லா $\alpha, \beta \in F$ மற்றும் $x, y \in W$ இற்கு $\alpha x + \beta y \in W$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

(b) பின்வரும் தொடைகள் வழமையான கூட்டல் மற்றும் எண்ணிப் பெருக்கத்தின் கீழ் புலம் $\mathbb{R}$ இன் மேல் காவி வெளி $\mathbb{R}^3$ இன் உபவெளிகளா எனத் துணிக. ஒவ்வொரு வகையிலும் உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(i) $A = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R};\ b = 2a + a^2$ மற்றும் $c = d\}$

(ii) $B = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R};\ a + b = c + d\}$

(c) F என்னும் ஒரு புலமொன்றின் மேல் α, β மற்றும் γ என்பன V இல் ஏகபரிமாணமுறையாய்ச் சாராத காவிகள் எனின், $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ என்பனவும் ஏகபரிமாணமுறையாய்ச் சாராதவை என நிறுவுக.

3.

(a) F என்னும் புலத்தின் மேல் V ஆனது ஒரு காவிவெளி எனக் கொள்க. $\beta \in V$ ஆனது $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in V$ என்னும் காவிகளின் தொடையின் ஒரு ஏகபரிமாண சேர்மானம் எனின், $\{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ ஆனது ஏகபரிமாணமுறையாய்ச் சார்ந்தது எனக் காட்டுக.

(b) W ஆனது F என்னும் புலத்தின் மேல் ஒரு முடிவுள்ள பரிமாணத்தைக் கொண்ட காவிவெளி V இன் ஒரு உபவெளி எனக் கொள்க, $\dim W \le \dim V$ என நிறுவுக.

(c) $T_1 : U \to V$ மற்றும் $T_2 : V \to W$ என்பன F என்னும் ஒரே புலத்தின் மேல் காவிவெளிகளிலுள்ள இரண்டு ஏகபரிமாண உருமாற்றங்கள் என்க. $T_2 \circ T_1 : U \to W$ சேர்க்கையும் ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றம் என நிறுவுக.

4.

(a) $T : V \to W$ ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றம் என்க, இங்கு F என்னும் புலத்தின் மேல் V, W ஆகியன காவிவெளிகள் ஆகும்.

(i) $T(0) = 0$ எனவும்,

(ii) $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ என்றால் என்றால் மட்டும் T ஒன்றுக்கொன்று எனவும், காட்டுக.

(b) $V = \mathbb{R}^3$ மற்றும் $W = \mathbb{R}^2$ என்க. வழமையான கூட்டல் மற்றும் எண்ணி பெருக்கத்துக்கு அமைவாக புலம் $\mathbb{R}$ இன் மேல் V மற்றும் W என்பன காவிவெளிகள் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

$T : V \to W$ என்னும் படமாக்கமானது $T(x, y, z) = (x + y, x + 2z)$ இனால் வரையறுக்கப்படுகிறது என்பதை கருதுக.

(i) T என்பது ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றம் எனக் காட்டுக.

(ii) T இன் அகணியைக் காண்க.

(iii) T ஒரு சமவுருவாக்கமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

5.

(a) $M = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a,b,c,d \in \mathbb{R} \}$ என்க. வழமையான தாயக் கூட்டல் மற்றும் எண்ணி பெருக்கத்துக்கு அமைவாக புலம் $\mathbb{R}$ இன் மேல் M ஒரு காவி வெளி என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

$T: M \to M$ என்னும் படமாக்கமானது $T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a+b & b \\ 3c & d \end{bmatrix}$ இனால் வரையறுக்கப்படுகிறது என்க. T ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றம் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

பின்வரும் தொடைகள் புலம் $\mathbb{R}$ இன் மேல் T இன் கீழ் காவிவெளி M இல் மாற்றமில் உபவெளிகளா எனத் துணிக.

(i) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 0 \end{bmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R} \right\}$

(ii) $W = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} | a,b,c \in \mathbb{R} \}$

(b)

(i) உட்பெருக்க வெளி ஒன்றை வரையறுக்குக.

(ii) F என்னும் ஒரு புலத்தின் மேல் V ஒரு உட்பெருக்க வெளி என்க. $x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$ இற்கு $< x_1 + x_2, y_1 + y_2 > = < x_1, y_1 > + < x_1, y_2 > + < x_2, y_1 > + < x_2, y_2 >$ என நிறுவுக.

(iii) $u = (x_1, x_2, x_3),\ v = (y_1, y_2, y_3)$ என்க, இங்கு $u, v \in \mathbb{R}^3$ ஆகும்.

$< u, v > = x_1{}^2 y_1{}^2 + x_2{}^2 y_2{}^2 + x_3 y_3$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $< u, v >$ என்பது $\mathbb{R}^3$ இன் ஒரு உட்பெருக்கமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

6.

(a) U ஆனது F என்னும் ஒரு புலத்தின் மேல் ஒரு காவி வெளி V இன் ஒரு உபவெளி, $T: U \to V$ ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றம் மற்றும் $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$ என்க, $S = \{u_1, u_2, \ldots u_n\}$ ஆனது U வில் உள்ள காவிகளின் ஏகபரிமாணமுறையாய்ச் சாராத தொடை என்க.

$T(S) = \{ T(u_i) |\ u_i \in S\}$ என்னும் தொடை ஏகபரிமாணமுறையாய்ச் சாராதா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(b) $W = \{(1, 1, -2, 0), (2, 1, -3, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 0)\}$ என்க. $\mathbb{R}$ புலத்தின் மேல் $\mathbb{R}^4$ இன் உபவெளி $Sp < W >$ க்கு ஒரு அடிமூலத்தைக் காண்க.

(c) மூன்று காவிகள் $u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (1, -1, 2)$ மற்றும் $u_3 = (1, 0, 1)$ என்பன வழமையான ஊக்களிட்டு மூவெளி E^3 இற்கான ஒரு அடிமூலத்தை உருவாக்கும் எனக் காட்டுக. கிராம்சிமிற்றர் செயற்பாட்டை பயன்படுத்தி $\{u_1, u_2, u_3\}$ இலிருந்து E^3 இற்கான நிமிர்செவ்வனடிமூலம் ஒன்றை அமைக்க.