094

ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය

ඉංජිනේරු තාක්ෂණ ඩිප්ලෝමා පාඨමාලාව - මට්ටම 02

අවසාන පරීක්ෂණය - 2007

ගණිතය II - MPZ 2230

කාලය පැය 03 යි.

දිනය - 2008 මැයි 04 වන දින   වේලාව - පෙ.ව.09.30 - ප.ව. 12.30 දක්වා

A,B හා C කොටසින් අඩුම වශයෙන් එක් ප්‍රශ්නයක්වත් තෝරා ගනිමින් ප්‍රශ්න 6 කට පිළිතුරු සපයන්න. Non Programmable ගණක යන්ත්‍ර භාවිතා කළ හැක. ගණක යන්ත්‍ර සඳහා ජංගම දුරකථන භාවිතා කිරීමට ඉඩ දෙනු නොලැබේ.

A- කොටස

01. H යනු AC ට BH ලම්බ වනසේ හා AB ට CH ලම්බවන සේ ABC තලයේ වූ ලක්ෂ්‍යයයි. තලයේ වූ සෘජුකෝණාශ්‍ර කාටීසිය අක්ෂ කුලකයකට සාපේක්ෂව $A \equiv (4,3)$ වේ. BH හා CH රේඛාවල සමීකරණ පිළිවෙලින් $x + y + 1 = 0$ හා $5x + 3y - 5 = 0$ වේ. AB හා AC පාදවල සමීකරණ සොයන්න. B, C හා H ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක සොයා AH හා BC ලම්බවන බව සත්‍යාපනය කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ එක් එක් ශීර්ෂය හරහා සම්මුඛ පාදයට සමාන්තරව අඳිනු ලබන රේඛා මගින් $A'B'C'$ ත්‍රිකෝණය සෑදේ. ජ්‍යාමිතික ක්‍රම මගින් (ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ප්‍රකාශිතව නොසොයා) H ලක්ෂ්‍ය $A'B'C'$ ලක්ෂ්‍යවලට සමදුරින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. $A'B'C'$ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය අපෝහනය කරන්න.

02. S යනු $A \equiv (8,0)$, $B \equiv (0,6)$ හා $C \equiv (7,7)$ ලක්ෂ්‍ය හරහා වැටෙන්නා වූ වෘත්තයයි. S වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. P (8,6) ලක්ෂ්‍යය හරහා ද වැටෙන බව සාධනය කරන්න. B හා P ලක්ෂ්‍යවලදී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක Q හිදී හමුවේ. Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න. $PQ = \frac{20}{3}$ බව පෙන්වන්න. S වෘත්තය බාහිරව ස්පර්ශ කරන සහ $x + 3 = 0$ රේඛාවද ස්පර්ශ කරන වෘත්තවල කේන්ද්‍රයන්ගේ පථයන් සොයන්න.

03. $P (at^2, 2at)$ ලක්ෂ්‍යයේදී $y^2 = 4ax$ පරාවලයට ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය සොයන්න. P ලක්ෂ්‍යයේදී අභිලම්භය x අක්ෂය G හිදී හමුවේ. PG හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය N වේ.

i. G හා N ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක සොයන්න.
ii. P පරාවලය මත විචලනය වන විට N ලක්ෂ්‍යයේ පථය සොයන්න.
iii. $S \equiv (a,0)$ ලක්ෂ්‍යය නම් PG රේඛාව SN ට ලම්බ බව පෙන්වන්න.
iv. SPG ත්‍රිකෝණය සමද්විපාද නම් P හි ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

04. $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ඉලිප්සයේ $P_1 \equiv (a\cos\alpha, b\sin\alpha)$, $P_2 \equiv (a\cos\beta, B\sin\beta)$ ලක්ෂ්‍ය යා කරන ජ්‍යායේ සමීකරණය $\frac{x}{a}\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2} = \cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$S = 0$ ඉලිප්සයට $P \equiv (a\cos\theta, b\sin\theta)$ ලක්ෂ්‍යයේදී ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ලියන්න. N යනු O හි සිට P ලක්ෂ්‍යයේ ස්පර්ශකයට ඇඳි ලම්භයේ අඩිය වේ. ON හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න. ඒනයින් ඉලිප්සය මත P විචලනය වන විට ON හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ පථය $4(x^2+y^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2$ බව පෙන්වන්න.

05. $16p^2 - 9q^2 = 1$, නම් $px+qy=1$, සරල රේඛාව $S \equiv \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} - 1 = 0$ බහුවලයට ස්පර්ශකයක් වන බව සාධනය කරන්න. $S = 0$ බහුවලයේ ස්පර්ශෝන්මුඛ $x^2 + y^2 - 2ky - 25 = 0$ වෘත්තය P_1 හා P_2 ලක්ෂ්‍යවලදී හමුවේ. $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ හා $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ වේ. මෙහි P_1 පළමු වෘත්ත පාදකයේද P_2 හතරවෙනි වෘත්ත පාදකයේද වන අතර k නියතයකි.

$\frac{y_1}{3} = \lambda + \sqrt{1+\lambda^2}$ බව හා $\frac{x_2}{4} = -\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි $\lambda = \frac{3k}{25}$ වේ.

එනයින් P_1P_2 රේඛාව k හි සියළුම අගයන්ට $S = 0$ බහුවලයට ස්පර්ශ වන බව පෙන්වන්න.

06. (a). $f(\theta) = \frac{1}{4\sin\theta - 3\cos\theta + 6}$, for $\theta \in \Re$ වේ.

i. සියළුම $\theta \in \Re$ සඳහා $\frac{1}{11} \le f(\theta) \le 1$ බව පෙන්වන්න.

ii. $f(\theta) = 1$ සමීකරණය 0° හා 360^0 අතර සියළුම විසඳුම් ලබා ගන්න.

(b) a හා b නියත වූ $\tan^{-1}(x+a) - \tan^{-1}(x+b) = \frac{\pi}{4}$ සමීකරණයේ x සඳහා තාත්වික මූල තිබීමට $(a-b+2)^2 \ge 8$ විය යුතු බව පෙන්වා

ඒනයින් $\tan^{-1}(x+1) - \tan^{-1}(x-1) = \frac{\pi}{4}$ විසඳන්න.

(c) සාමාන්‍ය අංකනයට අනුව ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නියමය භාවිතා කරමින් $a = c + \lambda b$ $\lambda \in \Re$ නම්, $\lambda\cos\frac{B}{2} = \cos\left(C + \frac{B}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

B -කොටස

07. ද මුවාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

$n \in Z^{+}$; සඳහා $(Cos\ \theta + j\ Sin\theta)^{n} = Cos\ n\ \theta + jSin\ n\ \theta$ බව උපකල්පනය කරමින් ප්‍රථිඵලය $n \in Z^{-}$.සඳහා සාධනය කරන්න.

i. n ධන නිඛිල සඳහා $(Sin\ \theta + j\ Cos\ \theta)^{n} = Cos\ n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + jSin\ n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

බව සාධනය කරන්න. $(1+j)^{8}$ හා $(1-j)^{8}$ හි අගයන් අපෝහනය කරන්න.

ii. $\left\{\frac{1 + Sin\theta + jCos\theta}{1 + Sin\theta - jCos\theta}\right\}^{8} = Cos(4\pi - 8\theta) + jSin(4\pi - 8\theta)$ බව පෙන්වන්න.

$\left[\frac{1+j}{1-j}\right]^{8} = 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

08. (a) ආගන්ඩ් සටහනේ අනුරූප පථ උපයෝගි කරගනිමින්,

Arg (Z - 1)- Arg (Z –i) $= \frac{\pi}{4}$ හා $|Z| = 1$; සමීකරණ දෙකම තෘප්ත කරන Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ලබා ගන්න. මෙහි Arg යනු විස්තාරයේ -π හා π අතර පිහිටන ප්‍රධාන අගය වේ.

(b) A, B, හා C ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් OA= $\sqrt{3}$ **i**+**j** OB = $\sqrt{2}$ **i** - $\sqrt{2}$ **j** OC = - **i** $\sqrt{3}$ **j** $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ හා $\overrightarrow{OC}$ දෛශිකවල විශාලත්වයන් සොයන්න.

ඒනයින් A, B හා C ලක්ෂ්‍ය වෘත්තයක පිහිටන බව පෙන්වා එම වෘත්තයේ අරය හා කේන්ද්‍රය සොයන්න.

ABDC සමාන්තරාශ්‍රයක් වනසේ D, ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න.

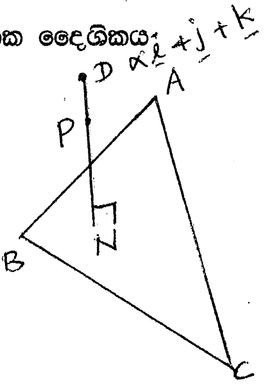
09. O මුල ලක්ෂ්‍යයකට සාපේක්ෂව A, B, C ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින්

3**i** +3**j**- **k**, 4**i** +2**j** -3**k** හා 6 **i** +10**j**-7**k** වේ.

i. $\overrightarrow{BA}$ හා $\overrightarrow{AC}$ ii. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ iii. $B\hat{A}C$ කෝණය

iv. $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{AC}$ v. ABC තලයට ලම්බක ඒකක දෛශිකය

vi. C ලක්ෂ්‍යයේ සිට AB රේඛාවට ලම්බක දුර සොයන්න.



vii. DN, ABC තලයට ලම්බ වනසේ $\overrightarrow{OD} = \alpha\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ වනසේ පිහිටි ලක්ෂයයකි. $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} =+ y\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ වේ. $\overrightarrow{OP}.(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{AC})$ සොයා ඒනයින් $\overrightarrow{OP}.(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{AC}$ බව ලබා ගන්න. $2x+z = 2\alpha+1$ බව පෙන්වන්න.

C- කොටස

10 i. එකම තනතුරක වූ පුරප්පාඩු දෙකක් සඳහා තෝරා ගැනීමට වූ සම්මුඛ පරීක්ෂණයට විවාහක යුවළක් ඉදිරිපත් වෙති. තනතුරක් සඳහා පුරුෂයා තෝරා ගැනීමේ සම්භාවිතාව 1/7 හා කාන්තාව තෝරා ගැනීමේ සම්භාවතාව 2/7. ක් වේ.

a) ඔවුන් අතුරෙන් කෙනෙකුට පමණක් තනතුරක් ලැබීමේ
b) දෙදෙනාටම තනතුරු ලැබීමේ
c) කිසිවෙකුට තනතුරු නොලැබීමේ
d) අඩුම වශයෙන් එක් අයෙකුටවත් තනතුර ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

ii. සවිධි අෂ්ඨතලයක, එහි ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණත් වල 1 සිට 8 දක්වා සංඛ්‍යා සටහන් කර ඇත. මේ අෂ්ඨතලය දාදු කැටයක් ලෙස භාවිතා කෙරෙයි. දාදු කැටය තිරස් මේසයක් මත පෙලීමේදී උඩටම ලැබෙන මුහුණතේ අංකය දාදු කැටය ලබා ගන්නා ලකුණු ලෙස සැළකෙයි. මෙවැනි දාදු කැට දෙකක් එකවර දමයි.
a) දාදු කැටවල ලකුණුවල එකතුව යටත් පිරිසෙයින් 14 වීමේ
b) දාදු කැටවල ලකුණුවල අන්තරය 2 වීමේ
සම්භාවිතාවයන් සොයන්න.

A හා B ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනෙකු දාදු කැට දෙක උඩ දමන ක්‍රීඩාවේ මාරුවෙන් මාරුවට නිරත වේ. ක්‍රීඩාව පළමුව A විසින් ආරම්භ කෙරෙයි. දාදු කැටවල අන්තරය 02 ලෙස පළමුව ලබන්නාට දිනුම හිමිවේ.

ඇ) A සිය පළමු ප්‍රයත්නයේදීම දිනුම ලැබීමේ
ආ) B සිය පළමු ප්‍රයත්නයේදීම දිනුම ලැබීමේ
ඉ) A සිය තුන්වැනි ප්‍රයත්නයේදීම දිනුම ලැබීමේ
සම්භාවිතාව සොයන්න.

11. i. එක්තරා සමාගමක් නිෂ්පාදනය කරන විදුලි බල්බවල අහඹු ලෙස තෝරා ගත් 1600 ක නියැදියක ජීවකාලය පිළිබඳ දත්ත පහත වගුවේ දැක්වේ.

ජීවි කාලය /පැය	බල්බ සංඛ්‍යාව
1000 – 1500	120
1500 – 2000	220
2000 – 2500	280
2500 – 3000	420
3000 – 3500	300
3500 – 4000	180
4000 – 4500	80

මෙම බල්බවල ආයු කාලයේ, මාතය, මධ්‍යස්ථය , මධ්‍යනයය හා සම්මත අපගමනය සොයන්න.

ඇ: නිං: බ

ii. නිරීක්ෂණ 5 ක මධ්‍යන්‍යය හා විචල්‍යතාව පිළිවෙලින් 4.4 හා 6.64 ක් වේ. එම නිරීක්ෂණ 5 න් 3 ක් 2, 1 හා 6 නම් ඉතිරි නිරීක්ෂණ දෙක සොයන්න.

12. කරුණාකර (a), (b) හා (c) කොටස් අතුරෙන් ඕනෑම දෙකකට පිළිතුරු සපයන්න.

(a) P අංශුව තිරස්ව U ප්‍රවේගයෙන් අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ සුමට කුහර ගෝලයක අභ්‍යන්තර පෘෂ්ඨයේ පහත්ම A ලක්ෂ්‍යයේදී ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ.

අංශුව Q ලක්ෂ්‍යයෙහි ඇති විට එහි ප්‍රවේගය V හා අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව R සඳහා ප්‍රකාශණ ලබා ගන්න. මෙහි $A\hat{O}Q = \theta$ වේ.

i. $u^2 = g\,a$ නම්, අංශුව ගෝල පෘෂ්ඨය අත් නොහරින බව පෙන්වන්න. අංශු ප්‍රථමවරට නිශ්චලතාවයට ඒමට පෙර සිය ගමන් මගේ සිට හරි අඩක් ගිය විට එහි ප්‍රවේගය $\sqrt{ga\left(\sqrt{3}-1\right)}$ බව පෙන්වන්න.

ii. A සිට $\dfrac{3a}{2}$ උසකදී අංශුව ගෝලය අත් හරී නම් U^2 සඳහා g හා a ඇසුරෙන් ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න. අංශුව ගෝලය අත්හරින මොහොතේදී P අංශුවේ වේගය a හා g ඇසුරෙන් සොයන්න.

(b) ප්‍රත්‍යාස්ථ මාපාංකය 4mg හා ස්වභාවික දිග 2a තන්තුවක කෙළවරක් සුමට තිරස් මේසයක පිහිටි අචල A ලක්ෂ්‍යයකට අමුණා අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් අමුණා තිබේ. AC=3a වනසේ වූ C ලක්ෂ්‍යයකදී අංශුව නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරී. අංශුව $(4+\pi)\sqrt{2a/g}$ කාලයකට පසු නැවත C ලක්ෂ්‍යය කරා ළඟා වන බව පෙන්වන්න.

(c) අරය A වූ රෝදයක ගැටියේ වෘත්තාකාර දාරය වටා යන තන්තුවකින් ස්කන්ධය m_1 හා m_2 ස්කන්ධ දෙකක් අමුණා ඇත. රෝදය එහි කේන්ද්‍රය හරහා යන අචල තිරස් අක්ෂයක් වටා කැරකේ. රෝදයේ අක්ෂයේ ඝර්ෂණය නොසලකා හරිමින් $m_2 > m_1$ නම් අංශුවල ත්වරණ $\dfrac{(m_2-m_1)g}{m_2+m_1+\dfrac{I}{a^2}}$. බව පෙන්වන්න.

I යනු අක්ෂය වටා රෝදයේ අවස්ථිති ඝූර්ණයයි.

- හිමිකම් ඇවිරිණි. -