ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී උපාධි පාඨමාලාව/ඒකාංගික විද්‍යා අධ්‍යාපන පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය 2006/2007
PMU 1191/PME 3191 - වීජගණිතය
3 වන මට්ටම - ශුද්ධ ගණිතය

22

කාලය :- පැය 2 යි.

දිනය :- 02-11-2006. වේලාව:- පෙ.ව. 09.30 සිට පෙ.ව. 11.30 දක්වා

ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

01.(a) $A = \{x \in \mathbb{R}: 3|x+1| + 5|x-1| \geq 10\}$ කුලකය නිර්ණය කරන්න.

A කුලකයේ දළ රූප සටහනක් $\mathbb{R}$ හි අඳින්න.

(b) f යනු, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{10^x}{10^x + 1}$$ පරිදි වූ ශ්‍රිතය ලෙස ගනිමු.

f එකට-එක බව පෙන්වන්න.

(c) $g: \mathbb{R} \to (0, 1)$ වන g එකට-එක සහ මතට වන ශ්‍රිතයක් පවතීද?

ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

02. (a) පහත සමීකරණ විසඳන්න.

(i) $\sin z = 5$ (ii) $\cos z = -2$.

(b) පහත ඒවා අගයන්න.

(i) 3^i (ii) $\sqrt[i]{3}$.

(c) පහත අසමානතාව විසඳා, විසඳුම් කුලකය ප්‍රාන්තරවල මේලයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න:

$$\frac{16x^2 - 34x + 15}{18x^2 - 9x - 2} \geq 0.$$

03. (a) $\dfrac{m^2}{n^2}=2$ වන සේ m, n පූර්ණ සංඛ්‍යා නොමැති බව සාධනය කරන්න.

(b) $I_0 = [1, 2]$ ලෙස ගනිමු. සියලු $n \in \mathbb{N}$ සඳහා $I_n \subseteq I_0$, $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$, $|I_n| \le \dfrac{|I_0|}{2^n}$ සහ $2 \in [a_n^2, b_n^2]$ වන $\{I_n\}$ සංවෘත කැදලි ප්‍රාන්තර අනුක්‍රමයක් නිර්මාණය කරන අයුරු පැහැදිලි කරන්න.

(c) $J_0 = [1, 4]$ සහ සියලු $n \in \mathbb{N}$ සඳහා $J_n = [a_n^2, b_n^2]$ ලෙස ගනිමු. $\{J_n\}$ යනු සියලු $n \in \mathbb{N}$ සඳහා, $|J_n| \le \dfrac{|J_0|}{2^n}$ වන සංවෘත කැදලි ප්‍රාන්තර අනුක්‍රමයක් බව සාධනය කරන්න.

(d) $r^2 = 2$ වන ලෙස r තාත්වික සංඛ්‍යාවක් පවතින බව අපෝහනය කිරීමට පූර්ණතා ප්‍රත්‍යක්ෂය භාවිතා කරන්න.

04.(a) $P(z) = z^4 - 8z^3 + 25z^2 - 34z + 22$ ලෙස ගනිමු.

(i) $1+i$, $P(z)=0$ හි මූලයක් බව පෙන්වන්න.

(ii) $P(z)=0$ හි සියලුම මූල සොයන්න.

(b) $\left\{(1-i)^2\right\}^{1/6}$, $\left\{(1-i)^{1/6}\right\}^2$ සොයා පිළිතුරු ධ්‍රැවක ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

(c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \underset{n \to \infty}{\text{සීමාව}} \int_0^{2\pi} e^{xt} \cos nt \, dt$$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇත. මෙහි $n \in \mathbb{N}$ වේ.

f එකට-එක වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

05.(a) A, B යනු $n \times n$ සමචතුරස්‍ර න්‍යාස දෙකක් ලෙස ගනිමු. AB සහ BA ට සමාන අයිගන් අගයන් ඇති බව සාධනය කරන්න.

(b) v සහ w යනු C සමමිතික න්‍යාසයක පිළිවෙලින් λ සහ μ ප්‍රභින්න අයිගන් අගයන් සඳහා අනුරූප වූ අයිගන් දෛශික නම්, v සහ w ප්‍රලම්බ දෛශික බව සාධනය කරන්න.

(c) A සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයකට $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ප්‍රභින්න අයිගන් අගයන් ඇත්තේ පිළිවෙලින් $x_1, x_2, \ldots, x_n$ අයිගන් දෛශික සමග බව උපකල්පනය කරමු. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ඒකජ ලෙස ස්වායත්ත බව සාධනය කරන්න.

06.(a) $G = \{A : A$ යනු, $|A| \neq 0$ වන 3×3 තාත්වික සමමිතික න්‍යාසයකි$\}$ ලෙස ගනිමු.

න්‍යාස ගුණිතය යටතේ G සමූහයක් වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(b) $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ සහ $+_7, \times_7$ පිළිවෙලින් 7 මාපාංකානුකූලව එකතු කිරීම සහ 7 මාපාංකානුකූලව ගුණ කිරීම ලෙස ගනිමු. එකතු කිරීමේ සහ ගුණ කිරීමේ වගු ආධාර කරගෙන $(F, +_7, \times_7)$ ක්ෂේත්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.

(c) $R = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ සහ $+_{12}, \times_{12}$ පිළිවෙලින් 12 මාපාංකානුකූලව එකතු කිරීම සහ 12 මාපාංකානුකූලව ගුණ කිරීම ලෙස ගනිමු.

$(R, +_{12}, \times_{12})$ මුදුවක් (වලයක්) බව පෙන්වන්න.

මෙම R මුදුවට (වලයට) ශුන්‍ය භාජක තිබේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(d) $R - \{0\}$ හි සියලුම සාමාජිකයින් ශුන්‍ය භාජක වන R මුදුවක් (වලයක්) පවතීද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

The Open University of Sri Lanka
B.Sc./B.Ed. Degree Programme – Level 03
Final Examination – 2006/2007
Pure Mathematics
PMU 1191/PME 3191 – Algebra

Duration :- Two Hours.

Date :- 02-11-2006. **Time :- 09.30 a.m. – 11.30 noon.**

Answer Four Questions Only.

01.(a) Determine the set $A = \{x \in \mathbb{R}: 3|x+1| + 5|x-1| \geq 10\}$.

Sketch the set A in $\mathbb{R}$.

(b) Let f be the function,

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{10^x}{10^x + 1}.$$

Show that f is one-one.

(c) Does there exist a function $g: \mathbb{R} \to (0, 1)$ such that g is one-one and onto? Justify your answer.

02. (a) Solve the following equations.

(i) $\sin z = 5$ (ii) $\cos z = -2$.

(b) Compute the following.

(i) 3^i (ii) $\sqrt[i]{3}$.

(c) Solve the following inequality and express the set of solutions as a union of intervals:

$$\frac{16x^2 - 34x + 15}{18x^2 - 9x - 2} \geq 0.$$

03. (a) Prove that there are no integers m, n such that $\frac{m^2}{n^2} = 2$.

(b) Let $I_0 = [1, 2]$. Explain how to construct a sequence $\{I_n\}$ of nested closed intervals such that $I_n \subseteq I_0$,

$$I_n = [a_n, b_n], \quad a_n, b_n \in \mathbb{Q}, \quad |I_n| \leq \frac{|I_0|}{2^n} \text{ and } 2 \in [a_n^2, b_n^2] \text{ for all } n \in \mathbb{N}.$$

(c) Put $J_0 = [1, 4]$ and $J_n = [a_n^2, b_n^2]$ for all $n \in \mathbb{N}$. Prove that $\{J_n\}$ is a sequence of nested closed intervals such that $|J_n| \leq \frac{|J_0|}{2^n}$ for all $n \in \mathbb{N}$.

(d) Use the completeness Axiom to deduce that there exists a real number r such that $r^2 = 2$.

04.(a) Let $P(z) = z^4 - 8z^3 + 25z^2 - 34z + 22$.

(i) Show that $1 + i$ is a root of $P(z) = 0$.

(ii) Find all the roots of $P(z) = 0$.

(b) Find $\left\{(1-i)^2\right\}^{1/6}$, $\left\{(1-i)^{1/6}\right\}^2$ and express answers in the polar form.

(c) Define $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by $f(x) = \lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} e^{xt} \cos nt \, dt$ where $n \in \mathbb{N}$.

Is f one-one? Justify your answer.

05.(a) Let A, B be two $n \times n$ square matrices. Prove that AB and BA have the same eigenvalues.

(b) Prove that, if v and w are eigenvectors corresponding to distinct eigenvalues λ and μ respectively of a symmetric matrix C then v and w are orthogonal vectors.

(c) Suppose that a square matrix A has n distinct eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ with the corresponding eigenvectors $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectively. Prove that $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ is linearly independent.

06.(a) Let $G = \{A : A$ is a real symmetric 3×3 matrix with $|A| \neq 0\}$.

Is G a group under matrix multiplication ? Justify your answer.

(b) Let $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ and let $+_7$, $\times_7$ be the addition modulo 7, multiplication modulo 7 respectively. Prove that $(F, +_7, \times_7)$ is a field with the aid of addition and multiplication tables.

(c) Let $R = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ and $+_{12}$, $\times_{12}$ be the addition modulo 12, multiplication modulo 12 respectively.

Show that $(R, +_{12}, \times_{12})$ is a ring.

Does this ring R have zero divisors? Justify your answer.

(d) Does there exists a ring R such that every member of $R - \{0\}$ is a zero divisor? Justify your answer.

இலங்கை திறந்தபல்கலைக்கழகம்
B,Sc/B.Ed பட்டப்பாடநெறி–மட்டம் 03
இறுதிப்பரீட்சை–2006/2007
தூயகணிதம்
PMU 1191/PME 3191 – அட்சரகணிதம்

034

காலம்:- இரண்டு மணித்தியாலங்கள்.

நாள் :- **02-11-2006.** நேரம் :- மு.ப. **09.30** – மு.ப.**11.30**

நான்கு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

01.(a)தொடை $A = \{x \in \mathbb{R}: 3|x+1| + 5|x-1| \geq 10\}$ ஐத் துணிக.

தொடை A ஐ $\mathbb{R}$ இல் பருமட்டாக வரைக.

(b) f ஆனது ஒரு சார்பாக அமையின்,

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{10^x}{10^x + 1}.$$

f ஆனது ஒன்று-ஒன்று (one-one)சார்பு எனக் காட்டுக.

(c) சார்பு g ஆனது ஒன்று-ஒன்று சார்பாகவும்,இன்மேல் சார்பாகவும் இருக்கும்போது $g: \mathbb{R} \to (0, 1)$ ஆனது உண்மையானதா?
உமது விடையினை நியாயப்படுத்துக.

02. (a)பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $\sin z = 5$ (ii) $\cos z = -2.$

(b) பின்வருவனவற்றைக் கணிக்க.

(i) 3^i (ii) $\sqrt[i]{3}$

(c) பின்வரும் சமனிலியைத் தீர்த்து, தீர்வுகளின் தொகுதியினை ஆயிடைகளின் ஒன்றிப்பாகத் தருக:

$$\frac{16x^2 - 34x + 15}{18x^2 - 9x - 2} \geq 0.$$

03. (a) $\dfrac{m^2}{n^2}=2$ என இருக்குமாயின், m, n என்பன முழுவெண்களாக இல்லை என நிறுவுக.

(b) $I_0 = [1,\ 2]$ ஆயின்,கூண்டுபட்ட மூடிய ஆயிடைகளின் தொடரி $\{I_n\}$ ஒன்றினை எவ்வாறு கட்டமைக்கலாமென விளக்குக.இங்கு $I_n \subseteq I_0$,

$I_n = [a_n, b_n]$, $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$, $|I_n| \le \dfrac{|I_0|}{2^n}$ உம் $2 \in [a_n^2, b_n^2]$ எல்லா $n \in \mathbb{N}$ உம் ஆகும்.

(c) $J_0 = [1,\ 4]$ ஐயும் $J_n = [a_n^2, b_n^2]$ எல்லா $n \in \mathbb{N}$ ஐயும் இடுக. எல்லா $n \in \mathbb{N}$ ஆகுமாறு $|J_n| \le \dfrac{|J_0|}{2^n}$ இருக்கத்தக்கவாறு $\{J_n\}$ ஆனது கூண்டுபட்ட மூடிய ஆயிடையின் ஒரு தொடரியெனக் காட்டுக.

(d) முற்றியதல்லாத வெளிப்படையுண்மையினைப் பாவித்து, $r^2 = 2$ ஆக இருக்கத் தக்கவாறு ஒரு மெய்யெண் r உள்ளதென உய்த்தறிக.

04.(a) $P(z) = z^4 - 8z^3 + 25z^2 - 34z + 22$ ஆயின்,

(i) $1+i$ ஆனது $P(z)=0$ இன் ஒரு மூலமெனக் காட்டுக.

(ii) $P(z)=0$ இன் எல்லா மூலங்களையும் காண்க.

(b) $\left\{(1-i)^2\right\}^{1/6}$, $\left\{(1-i)^{1/6}\right\}^2$ ஆகியவற்றினைக் கண்டு, விடையினை முனைவுவடிவில் எடுத்துரைக்க.

(c) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ஆனது $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{xt}\cos nt\, dt$ ஆல் வரையறுக்கப்படுகின்றது. இங்கு $n \in \mathbb{N}$.

f ஆனது ஒன்று-ஒன்று சார்பா? உமது விடையினை நியாயப்படுத்துக.

05.(a) A, B என்பன இரு $n \times n$ சதுரத்தாயங்களாகுமெனின்,AB யும் BA யும் ஒரே முறைமைப்பெறுமானங்களைக் கொண்டவையென நிறுவுக.

(b) v , w ஆகியவை ஒரு சமச்சீர்த்தாயம் C இன் வெவ்வேறான முறைமைப் பெறுமானங்கள் λ, μ என்பனவற்றிகொத்த முறைமைக்காவிகளாயின், v , w நிமிர்கோணக் காவிகளாகுமென நிறுவுக.

(c) ஒரு சதுரத்தாயம் A ஆனது n எண்ணிக்கையான வெவ்வேறான முறைமைப்பெறுமானங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ க்குகொத்த முறைமைக்காவிகள் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ களை முறையே கொண்டுள்ளன. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ஏகபரிமாணமுறையாய் சாராத ஒன்று எனக் காட்டுக.

06.(a) $G = \{A : A$ ஆனது ஒரு மெய்யான சமச்சீரான 3×3 தாயம்.அத்தோடு $|A| \neq 0$ ஆகும்$\}$. தாயப்பெருக்கத்தின்கீழ் G ஆனது ஒரு குழுவாகுமா(group)? உமது விடையினை நியாயப்படுத்துக.

(b) $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ உம் $+_7$, $\times_7$ என்பவை முறையே கூட்டல் மட்டுக்கு 7 உம்,பெருக்கல் மட்டுக்கு 7 உம் ஆகும்.கூட்டல்,பெருக்கல் அட்டவணையின் உதவியுடன் $(F, +_7, \times_7)$ ஆனது ஒரு புலம்(field) எனக் காட்டுக.

(c) $R = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ உம் $+_{12}$, $\times_{12}$ என்பவை முறையே கூட்டல் மட்டுக்கு 12 உம்,பெருக்கல் மட்டுக்கு 12 உம் ஆகும்.

$(R, +_{12}, \times_{12})$ ஆனது ஒரு வளையமெனக்(ring) காட்டுக.

இவ் வளையம் R ஆனது பூச்சிய வகுத்தியைக் கொண்டுள்ளதா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(d) $R - \{0\}$இன் ஒவ்வொரு உறுப்பியும் பூச்சிய வகுத்தியாயின் வளையம் R ஆனது முடிவுறுத்தப்படுமா?உமது விடையினை நியாயப்படுத்துக.