

ශ්‍රී ලංකා විද්‍යා විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය - 2010/2011
ඉදිම ගණිතය - තුන්වන මට්ටම
PMU 1191/ PME 3191 - විජ ගණිතය



කාලය පැය දෙකයි.

දිනය: 2010.12.28

වේලාව: ප.ව. 1.00 - ප.ව. 3.00 දක්වා.

ප්‍රශ්න අංක 06 ඇතුළුව ප්‍රශ්න හතරකට පිළිතුරු සපයන්න.

1. (a) $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්, $\sqrt{3}$ හි අගය දශමස්ථාන තුනකට නිවැරදිව සොයන්න.
 - (b) (i) 0.1947999... අනන්ත දශමය අපරිමිත ශ්‍රේණියක් ලෙස ලියා දක්වන්න.
(ii) $\frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6} + \frac{9}{10^7} + \dots + \frac{9}{10^{n+4}} + \dots$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියේ ඓක්‍යය සොයන්න.
එනම්, $0.19479999\dots = 0.1948$ බව පෙන්වන්න.
 - (c) $f(x) = |x+1|$ හි ප්‍රස්ථාරය සහ $g(x) = 5 - |x-2|$ හි ප්‍රස්ථාරය එකම සටහනක අඳින්න.
එනම්, $|x+1| + |x-2| \leq 5$ සඳහා x හි අගය කුලකය සොයන්න.
2. (a) \mathbb{Z} යනු සියලු නිඛිල සංඛ්‍යා කුලකය යැයි ද, \mathbb{N} යනු සියලු සෘණ නොවන නිඛිල සංඛ්‍යා කුලකය යැයි ද, ගනිමු.
 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ ශ්‍රිතයක්
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \text{ නම්} \\ -2x-1, & x < 0 \text{ නම්} \end{cases}$$
මගින් අර්ථ දක්වා ඇත.
(i) $\{f(x) : -3 \leq x \leq 3\}$ කුලකය,
(ii) $\{x : 3 \leq f(x) \leq 9\}$ කුලකය,
(iii) f හි ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතය වන f^{-1} සොයන්න.
 - (b) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සහ $x \neq 1$ සඳහා, g_0 නම් ශ්‍රිතයක් $g_0(x) = \frac{1}{1-x}$ මගින් සහ $n=1,2,3,\dots$ සඳහා g_n නම් ශ්‍රිතයක්, $g_n(x) = g_0(g_{n-1}(x))$ මගින් අර්ථ දක්වා ඇත.
 $g_{2012}(2012)$ සොයන්න.

3. (a) A සහ B යනු U සර්වත්ව කුලකයේ උපකුලක ලෙස ගනිමු.

$$A \cap (U \setminus B) = A \setminus B \text{ බව සාධනය කරන්න.}$$

(සටහන: සාධනවලදී වෙන් රූප භාවිතා කළ නොහැකිය.)

- (b) S සහ T අභිශුන්‍ය නොවන කුලක දෙක අතර කාර්ටීසිය ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

(i) $A = \{a, b\}$ සහ $B = \{2, 3\}$ සහ $C = \{3, 4\}$ නම්, $A \times (B \cup C)$ සහ $(A \times B) \cup (A \times C)$ සොයන්න.

- (ii) A, B, C යනු නිශ්ශුන්‍ය කුලක තුනක් ලෙස ගනිමු.

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C) \text{ බව සාධනය කරන්න.}$$

- (c) පහත දැක්වෙන $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ හි උපකුලක කාර්ටීසියානු සටහනක නිරූපණය කරන්න.

(i) $\{(x, y) : x + y \leq 1\}$ (ii) $\{(x, y) : x^2 + y^2 > 4\}$.

4. (a) n ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා, e මූලාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

n , සෘණ නිඛිලමයක් සඳහා e ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව අපෝහනය කරන්න.

$$(\sqrt{3} - i)^k = 2^k \left(\cos \frac{k\pi}{6} - i \sin \frac{k\pi}{6} \right) \text{ බව පෙන්වන්න; මෙහි } k \text{ යනු නිඛිලයකි.}$$

එනමින්, $(\sqrt{3} - i)^m$ යන්න තාත්වික සහ ධන වන m හි අඩුතම ධන අගය සොයන්න.

- (b) $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$, මෙහි $z = x + iy$ සහ $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ යන සූත්‍ර භාවිතයෙන්,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + i \log_e 2\right) \text{ අගයන්න.}$$

5. (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ යැයි ගනිමු.

- (i) A^2 සහ A^3 සොයා, ඒ නමින්, $A^3 = \lambda A^2 + \mu A + \nu I$ වන පරිදි λ, μ, ν සොයන්න;

මෙහි I යනු 3 වන සෘණයේ ඒකක න්‍යාසය වේ.

- (ii) A^2, A සහ I ඇසුරෙන් A^{-1} ප්‍රකාශ කර, එය න්‍යාස ආකාරයෙන් ලියා දක්වන්න.

- (b) සියලු α, β, γ ට වෙනස් අගයන් තිබෙයි නම් හා $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 - 1 \\ \beta & \beta^2 & \beta^3 - 1 \\ \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 - 1 \end{vmatrix} = 0$ නම්, $\alpha\beta\gamma = 1$

බව පෙන්වන්න.

6. (a) S සංඛ්‍යා කුලකයක් මත “ \circ ” ගණිත කර්මයක්

$$a \circ b = \frac{ab}{a+b}$$

ලෙස අර්ථ දක්වා ඇත.

පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවලදී \circ යන්න ද්විමය කර්මයක් වේදැයි නිර්ණය කරන්න:

(i) $S = \mathbb{Z}^+$

(ii) $S = \mathbb{Q}$

(iii) $S = \{x \in \mathbb{Q} : x \neq 0\}$

(iv) $S = \mathbb{Q}^+$

(b) $K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ ලෙස ගනිමු.

න්‍යාස ගුණිතය යටතේ K කුලකය සඳහා “Cayley වගුව” ගොඩනගන්න.

එනමින්, K යනු න්‍යාස ගුණිතය යටතේ කාණ්ඩයක් (group) බව සාධනය කරන්න.

The Open University of Sri Lanka
 B.Sc/B.Ed. Degree Programme
 Final Examination - 2010/2011
 Pure Mathematics - Level 03
 PMU 1191/ PME 3191 - Algebra



Duration: - Two hours

Date: 28.12.2010

Time: 1.00 p.m. - 3.00 p.m.

Answer Four questions including Question No. 6.

1. (a) Use the iterative formula $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right)$ to find the value of $\sqrt{3}$ accurate to three decimal place.

- (b) (i) Express the infinite decimal 0.19479999... as an infinite series.

- (ii) Find the sum of the geometric series

$$\frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6} + \frac{9}{10^7} + \dots + \frac{9}{10^{n+4}} + \dots$$

Hence, show that $0.19479999\dots = 0.1948$.

- (c) Sketch the graph of $f(x) = |x+1|$ and the graph of $g(x) = 5 - |x-2|$ in the same diagram.

Hence, find the set of values of x for which $|x+1| + |x-2| \leq 5$.

2. (a) Let \mathbb{Z} be the set of all integers and \mathbb{N} be the set of all non-negative integers.

A function $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ is defined by

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{if } x \geq 0 \\ -2x-1, & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Find:

- (i) the set $\{f(x) : -3 \leq x \leq 3\}$,

- (ii) the set $\{x : 3 \leq f(x) \leq 9\}$,

- (iii) f^{-1} , the inverse function of f .

- (b) The function g_0 is defined by $g_0(x) = \frac{1}{1-x}$ for all $x \in \mathbb{R}$ with $x \neq 1$, and the function g_n is defined by $g_n(x) = g_0(g_{n-1}(x))$ for $n = 1, 2, 3, \dots$

Find $g_{2012}(2012)$.

3. (a) Let A and B be subsets of a universal set U .

Prove that $A \cap (U \setminus B) = A \setminus B$.

(Note: Venn Diagrams cannot be used in proofs.)

- (b) Define the *Cartesian product* of the two non-empty sets S and T .

(i) If $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$ and $C = \{3, 4\}$, find $A \times (B \cup C)$ and $(A \times B) \cup (A \times C)$.

(ii) Let A, B, C be three non-empty sets. Prove that $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

- (c) Sketch on a coordinate diagram the following subsets of $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

(i) $\{(x, y) : x + y \leq 1\}$ (ii) $\{(x, y) : x^2 + y^2 > 4\}$.

4. (a) State **De Moivre's Theorem** for a positive integral index n .

Deduce that the result is also true when n is a negative integer.

Show that $(\sqrt{3} - i)^k = 2^k \left(\cos \frac{k\pi}{6} - i \sin \frac{k\pi}{6} \right)$, where k is an integer.

Hence, find the least positive m for which $(\sqrt{3} - i)^m$ is real and positive.

- (b) Use the formulae $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$, where $z = x + iy$ and $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

to evaluate $\cos\left(\frac{\pi}{2} + i \log_e 2\right)$.

5. (a) Let $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

(i) Find A^2 and A^3 , and hence find λ, μ, ν such that $A^3 = \lambda A^2 + \mu A + \nu I$, where I is the identity matrix of order 3.

(ii) Express A^{-1} in terms of A^2, A and I , and write it in the matrix form.

- (b) If α, β, γ all have different values, and if $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 - 1 \\ \beta & \beta^2 & \beta^3 - 1 \\ \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 - 1 \end{vmatrix} = 0$, prove that $\alpha\beta\gamma = 1$.

6. (a) An operation \circ is defined on a set of numbers S by

$$a \circ b = \frac{ab}{a+b}.$$

Decide whether \circ is a binary operation in each of the following cases:

(i) $S = \mathbb{Z}^+$

(ii) $S = \mathbb{Q}$

(iii) $S = \{x \in \mathbb{Q} : x \neq 0\}$

(iv) $S = \mathbb{Q}^+$

(b) Let $K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Construct a *Cayley* table for the set K with respect to the matrix multiplication.

Hence, show that K is a group with respect to matrix multiplication.

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞானமாணி/கல்விமாணிப்பட்டப்பாடநெறி
இறுதியாண்டுப் பரீட்சை 2010/2011
தூய கணிதம்-மட்டம் 03
PMU1191/PME 3191 - அட்சரகணிதம்



காலம் :- இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

நாள் :- 28-12-2010.

நேரம்:- பி. ப .1.00- பி. ப. 3.00

6 ஆம் வினா உள்ளடங்கலாக நான்கு வினாக்களுக்கு விடையளிக்குக.

1. (a) $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right)$ என்றும் மீள்செயல்முறைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி

$\sqrt{3}$ இன்பெறுமதியை மூன்று தசமதானங்களில் காண்க.

- (b) (i) முடிவுறாத் தசம எண்ணான 0.19479999... ஐ முடிவுறாத்தொடராக விரிவுபடுத்துக.
(ii) பின்வரும் பெருக்கத்தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக்காண்க.

$$\frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6} + \frac{9}{10^7} + \dots + \frac{9}{10^{n+4}} + \dots$$

இதிலிருந்து 0.19479999.... = 0.1948. எனக்காட்டுக.

- (c) $f(x) = |x+1|$ மற்றும் $g(x) = 5 - |x-2|$ என்பவற்றிற்கான வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இதிலிருந்து $|x+1| + |x-2| \leq 5$ இல் x இற்குரிய பெறுமானங்களின் தொடையைக்காண்க.

2. (a) \mathbb{Z} ஆனது முழு எண்களின் தொடை என்கமற்றும் \mathbb{N} ஆனது மறைஎண் அல்லாத முழு எண்களின் தொடை என்க. சார்பு $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ ஆனது இவ்வாறு வரையறுக்கப்படுகின்றது.

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ஆனால் } x \geq 0 \\ -2x-1, & \text{ஆனால் } x < 0 \end{cases}$$

பின்வருவனவற்றைக்காண்க.

- (i) தொடை $\{f(x) : -3 \leq x \leq 3\}$,
(ii) தொடை $\{x : 3 \leq f(x) \leq 9\}$,
(iii) f இன் நேர்மாறு சார்பு, f^{-1} .

- (b) $x \neq 1$ உடன் எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கு சார்பு g_0 ஆனது $g_0(x) = \frac{1}{1-x}$, என வரையறுக்கப்படுகின்றது. மேலும் $n = 1, 2, 3, \dots$ இற்கு சார்பு g_n ஆனது $g_n(x) = g_0(g_{n-1}(x))$ எனவரையறுக்கப்படுகின்றது. $g_{2012}(2012)$ ஐக் காண்க.

3. (a) A மற்றும் B என்பன அகிலத்தொடை U இன் உபதொடைகள் என்க.

$$A \cap (U \setminus B) = A \setminus B \text{ என நிறுவுக.}$$

(குறிப்பு: நிறுவலின் போது வென்வரிப்படம் பயன்படுத்த முடியாது)

- (b) சூனியத்தொடைகள் அல்லாத S மற்றும் T என்பவற்றின் தெக்காட்டின் பெருக்கத்தை வரையறுக்க.

$$(i) A = \{a, b\}, B = \{2, 3\} \text{ மற்றும் } C = \{3, 4\}, \text{ எனின் } A \times (B \cup C) \text{ மற்றும் } (A \times B) \cup (A \times C)$$

என்பவற்றைக் காண்க.

- (ii) A, B, C என்பன சூனியமற்ற மூன்று தொடைகள் என்க.

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C) \text{ என நிறுவுக.}$$

- (c) பின்வரும் $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ இன் உபதொடைகளை ஆள்கூற்று வரிப்படமொன்றில் குறித்துக்காட்டுக.

$$(i) \{(x, y) : x + y \leq 1\} \quad (ii) \{(x, y) : x^2 + y^2 > 4\}.$$

4. (a) நேர் நிறையெண் சுட்டி n இற்கான தமோய்வரின் தேற்றத்தைக் கூறுக.

n மறையெண் ஆகும்போதும் இப்பெறுபேறுகள் உண்மையாகும் என உய்த்தறிக.

$$(\sqrt{3} - i)^k = 2^k \left(\cos \frac{k\pi}{6} - i \sin \frac{k\pi}{6} \right) \text{ எனக்காட்டுக. இங்கு } k \text{ ஒரு நிறையெண்ணாகும்.}$$

இதிலிருந்து $(\sqrt{3} - i)^m$ ஆனது மெய் மற்றும் நேர் எண்ணாக இருக்கும் போது m இன் இழிவுப்பொறுமானத்தைக் காண்க.

- (b) $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $\cos\left(\frac{\pi}{2} + i \log_e 2\right)$ ஐ

$$\text{கணிக்குக. இங்கு } z = x + iy \text{ மற்றும் } \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

5. (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ என்க.

- (i) A^2 மற்றும் A^3 ஐ காண்க. மேலும் இதிலிருந்து $A^3 = \lambda A^2 + \mu A + \nu I$ ஆகுமாறு λ, μ, ν என்பவற்றைக் காண்க. இங்கு I என்பது 3ம் வரிசையில் உள்ள அலகுத்தாயமாகும்.

- (ii) A^{-1} ஐ A^2, A மற்றும் I என்னும் உறுப்புக்களில் தருக. மேலும் அதை தாயவடிவில் எழுதுக.

(b) α, β, γ என்பன வித்தியாசமான பெறுமானங்களாகவும் மற்றும்

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 - 1 \\ \beta & \beta^2 & \beta^3 - 1 \\ \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

ஆகவும் இருப்பின் $\alpha\beta\gamma = 1$ என நிறுவுக.

6. (a) எண்களின் தொடையொன்றான S இல் \circ என்னும் செய்கையொன்று $a \circ b = \frac{ab}{a+b}$ என வரையறுக்கப்படுகின்றது.

பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பங்களிலும் \circ என்பது துவித செய்கையா என தீர்மானிக்குக.

(i) $S = \mathbb{Z}^+$

(ii) $S = \mathbb{Q}$

(iii) $S = \{x \in \mathbb{Q} : x \neq 0\}$

(iv) $S = \mathbb{Q}^+$

(b) $K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ என்க.

தாய்ப்பெருக்கத்துடனான தொடை K இன் கேலி அட்டவணையை அமைக்குக.

இதிலிருந்து K ஆனது தாய்ப்பெருக்கங்களின்படி ஒரு கூட்டமெனக் காட்டுக.