ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය - 2009/2010
ව්‍යවහාරික ගණිතය - තුන්වන මට්ටම
AMU 1181/AME3181 – අවකල සමීකරණ

කාලය පැය දෙකයි.

දිනය : **2010.06.15** වේලාව - ප.ව. **1.00** - ප.ව. **3.00** දක්වා.

ප්‍රශ්න හතරකට පිළිතුරු සපයන්න.

1. (a) පහත දැක්වෙන සමාවර්තිතා සම්බන්ධවල ඊළඟ පද පහ ගණනය කරන්න.

   (i) $x_{r+1} = \frac{1}{2}\left(x_r + \frac{4}{x_r}\right)$; මෙහි $x_0 = 1$.

   (ii) $u_{r+1} = u_r + u_{r-1}$; මෙහි $u_0 = 1$, $u_1 = 2$.

   (b) ආරම්භයේ දී \$ 20,000 ක් තැන්පත් කර ඇති ඉතිරි කිරීමේ ගිණුමක් සඳහා 10% ක පොළියක් වාර්ෂිකව ලැබෙන අතර සෑම වර්ෂයක් අවසානයේ දී \$ 4,000 ක් ගිණුමෙන් ඉවත් කර ගනු ලැබේ. මෙම තත්ත්වය නිරූපණය කිරීමට සමාවර්තිතා සම්බන්ධයක් සොයන්න. තවද, මෙම ගිණුමේ මුදල් අවසන් වීමට ගත වන කාලය සොයන්න.

2. (a) $y = ae^{2x} + be^{-3x} + ce^{x}$, සාධාරණ විසඳුමට අනුරූප අවකල සමීකරණය සොයන්න; මෙහි a, b සහ c යනු තාත්ත්වික නියත වේ.

   (b) $y = c_1e^{m} + c_2xe^{mx} + c_3x^2e^{mx}$, යනු $(D-m)^3 y = 0$, අවකල සමීකරණයෙහි විසඳුමක් බව සත්‍යාපනය කරන්න. මෙහි c_1, c_2 සහ c_3 තාත්ත්වික නියත වන අතර $D \equiv \frac{d}{dx}$ වේ.

   (c) $\frac{dy}{dx} = 1 - xy$ අවකල සමීකරණය සලකන්න ; මෙහි $y(0) = 1$ වේ.

   (i) " ඔයිලර් ක්‍රමය" සඳහා පියවර දිග 0.1 වන පරිදි සමාවර්තිතා සම්බන්ධය ලියා දක්වන්න.

   (ii) පියවර දිග 0.1 භාවිතයෙන්, $y(0.3)$ ට ඔයිලර් ක්‍රම සන්නිකර්ෂණය ගණනය කරන්න.

3. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)(y+2)}{x(y-1)(x+2)}$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

   (b) $y = Vx^2$ ආදේශය උපයෝගී කර ගැනීමෙන්, $x^2\frac{dy}{dx} - 2xy + 3 = 0$ අවකල සමීකරණය $\frac{dV}{dx} = \frac{-3}{x^4}$ ආකාරයට ඌණනය කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

   එනයින්, x ඇසුරෙන් y සඳහා සාධාරණ විසඳුම $y = \lambda x^2 + \frac{1}{x}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි λ යනු අභිමත නියතයකි.

4. එක්තරා සත්ත්ව විශේෂයක සංගණනය $P(t)$ ලෙස ගනිමු.

$P(t)$ යන්න, $\frac{dP}{dt}=\frac{1}{25000}P(t)\left(1000-P(t)\right)$, $P(0)=100$; ප්‍රවර්ධන සමීකරණය තෘප්ත කරන්නේ යැයි උපකල්පනය කරමු; මෙහි t අවුරුදුවලින් මැන ඇත.

අවුරුදු 10 කට පසු සත්ත්ව ගහනය $\frac{1000}{1+9e^{-\frac{2}{5}}}$ බව පෙන්වන්න.

$P(t)$ හි දීර්ඝ කාලීන හැසිරීම කුමක්ද?

5. (a) පළමු ගණයේ ඒකජ අවකල සමීකරණය වන, $\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)$ හි සාධාරණ විසඳුම,

$y(x)=e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx+C\right\}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

(b) $z=\frac{1}{y}$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $(1+x^2)\frac{dy}{dx}-4xy=e^x y^2$ අවකල සමීකරණය,

$\left(1+x^2\right)\frac{dt}{dx}+4xz=-e^x$ ඒකජ අවකල සමීකරණයට පරිණාමනය කරන්න.

එනයින්, $x=0$ විට $y=1$ බව දී ඇති විට, ඉහත අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

6. (a) $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0$; $x>0$ අවකල සමීකරණයෙහි සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

[ඉඟිය: පළමුව $y=x^n$ ආකාරයේ විසඳුමක් යොදා බලන්න.]

(b) පහත දී ඇති අවකල සමීකරණයට එහි සාධාරණ විසඳුමෙහි සයින් හා කෝසයින් පද අඩංගු වන්නේ k හි කුමන අගයන් සඳහාද?

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4k\frac{dy}{dx}+4y=0.$$

(c) පහත දැක්වෙන අවකල සමීකරණයේ ව්‍යක්තික අනුකලය සෙවීමට "$D-$operator" ක්‍රමය භාවිතා කර, එනයින් එහි සාධාරණ විසඳුම ලබාගන්න.

$$\left(D^2-5D+6\right)y=e^{2x}x^2 \text{, මෙහි } \left(D\equiv\frac{d}{dx}\right).$$

The Open University of Sri Lanka
B.Sc/B.Ed. Degree Programme
Final Examination - 2009/2010
Applied Mathematics - Level 03
AMU 1181/AME 3181 – Differential Equations

Duration: -Two hours.

Date: 15.06.2010 **Time: 1.00 p.m. - 3.00 p.m.**

Answer **FOUR** questions.

1. (a) Compute the next five terms of the following recurrence relations:

(i) $x_{r+1} = \frac{1}{2}\left(x_r + \frac{4}{x_r}\right)$ starting with $x_0 = 1$.

(ii) $u_{r+1} = u_r + u_{r-1}$, starting with $u_0 = 1,\ u_1 = 2$.

(b) Find the recurrence relation which describes the situation in which $\$20{,}000$ is deposited initially in a saving account that yields 10% interest per annum and $\$4{,}000$ is withdrawn at the end of each year. When does the money run out?

2. (a) Find the differential equation that corresponding to the general solution $y = ae^{2x} + be^{-3x} + ce^{x}$; where a, b and c are constants.

(b) Verify that $y = c_1e^{mx} + c_2xe^{mx} + c_3x^2e^{mx}$, satisfies the differential equation $(D-m)^3 y = 0$; where c_1, c_2 and c_3 are constants and $D \equiv \frac{d}{dx}$.

(c) Consider the differential equation $\frac{dy}{dx} = 1 - xy$ with $y(0) = 1$.

(i) write down the recurrence relation for Euler's method with step length 0.1;

(ii) using step length 0.1 calculate the Euler's method approximation to $y(0.3)$.

3. (a) Solve the differential equation: $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)(y+2)}{x(y-1)(x+2)}$

(b) Show that the differential equation $x^2\frac{dy}{dx} - 2xy + 3 = 0$ may be reduced to the form $\frac{dV}{dx} = -\frac{3}{x^4}$ by means of the substitution $y = Vx^2$.

Hence, show that the general solution for y in terms of x is $y = \lambda x^2 + \frac{1}{x}$, where λ is an arbitrary constant.

4. Let $P(t)$ be the population of a certain animal species. Assume that $P(t)$ satisfies the logistic growth equation

$$\frac{dP}{dt}=\frac{1}{25000}P(t)\left(1000-P(t)\right), \quad P(0)=100; \text{ where } t \text{ is measured in years.}$$

Show that the population after 10 years is $\dfrac{1000}{1+9^{-\frac{2}{5}}}$.

What is the long-term behavior of the population $P(t)$?

5. (a) Show that the general solution of the first order linear differential equation,

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x) \text{ is}$$

$$y(x)=e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}\,dx+C\right\}, \text{ where } C \text{ is an arbitrary constant.}$$

(b) Using a substitution $z=\dfrac{1}{y}$ transform the differential equation $\left(1+x^2\right)\dfrac{dy}{dx}-4xy=e^x y^2$

in to the linear differential equation $\left(1+x^2\right)\dfrac{dz}{dx}+4xz=-e^x$.

Hence, solve the first differential equation given that $y=1$ when $x=0$.

6. (a) Find the general solution of the differential equation $2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=0, \quad x>0$

[**Hint**: first look for solution of the form $y=x^n$.]

(b) For which values of the constant k does the differential equation below have a general solution that involves *sines* and *cosines*?

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4k\frac{dy}{dx}+4y=0.$$

(c) Use the "$D-$operator" method to find the particular integral of the following differential equation and hence obtain the general solution of it:

$$\left(D^2-5D+6\right)y=e^{2x}x^2, \text{ where } \left(D\equiv\frac{d}{dx}\right).$$

06

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்

விஞ்ஞானமாணி/கல்விமாணி பட்டப்பாடநெறி

இறுதிப் பரீட்சை – **2009/2010**

பிரயோகக் கணிதம் – மட்டம் **03**

AMU 1181/AME 3181 – வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்

காலம் :- இரண்டு மணித்தியாலங்கள்.

நாள் :- **15-06-2010** நேரம்:- பிப **1.00**– பிப **3.00**

நான்கு வினாக்களுக்கு விடையளிக்குக.

1. (a) பின்வரும் மடங்குத்தொடர்புகளின் அடுத்த ஐந்து உறுப்புக்களைக் கணிக்க:

(i) $x_0 = 1$ உடன் ஆரம்பிக்கும் $x_{r+1} = \frac{1}{2}\left(x_r + \frac{4}{x_r}\right)$

(ii) $u_0 = 1, u_1 = 2$ உடன் ஆரம்பிக்கும் $u_{r+1} = u_r + u_{r-1}$.

(b) $\$20,000$ ஐ வைப்பிலிட்டு ஆரம்பிக்கப்படும் சேமிப்பு கணக்கொன்றில் 10% வருடாந்த வட்டியுடன் ஒவ்வொரு வருட முடிவில் $\$4,000$ உம் மீளப்பெறப்படுகிறது. இத்தருணத்தை விபரிக்கும் மடங்குத்தொடர்பைக் காண்க. எப்போது பணம் முடிவடையும்?

2. (a) $y = ae^{2x} + be^{-3x} + ce^{x}$ என்னும் பொதுத்தீர்வுடன் ஒத்த வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைக் காண்க, இங்கு a, b மற்றும் c என்பன மெய் மாறிலிகள் ஆகும்.

(b) $y = c_1e^{mx} + c_2xe^{mx} + c_3x^2e^{mx}$ என்பது $(D-m)^3 y = 0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை திருப்திப்படுத்துமா என வாய்ப்புப் பார்க்க, இங்கு c_1, c_2 மற்றும் c_3 என்பன மெய் மாறிலிகள் மற்றும் $D \equiv \frac{d}{dx}$.

(c) $y(0) = 1$ உடன் $\frac{dy}{dx} = 1 - xy$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைக் கருதுக.

(i) படி நீளம் 0.1 ஆகவுள்ள ஒயிலரின் முறைக்குரிய மடங்குத்தொடர்பை எழுதுக.

(ii) படி நீளம் 0.1 ஐ பயன்படுத்தி $y(0.3)$ க்கு ஒயிலரின் முறை அண்ணளவாக்கத்தைக் கணிக்க.

3. (i) $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)(y+2)}{x(y-1)(x+2)}$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(ii) $x^2\frac{dy}{dx} - 2xy + 3 = 0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை $y = Vx^2$ என்னும் பிரதியீட்டின் மூலம்

$\frac{dV}{dx}=-\frac{3}{x^4}$ என்னும் வடிவத்திற்கு ஒடுக்கலாம் எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து y இற்குரிய x சார்பான பொதுத்தீர்வு $y=\lambda x^2+\frac{1}{x}$ எனக்காட்டுக. இங்கு λ ஒரு எதேச்சை மாறிலியாகும்.

4. ஒரு குறிப்பிட்ட விலங்கு இனத்தின் சனத்தொகை $P(t)$ என்க. $P(t)$ என்பது

$\frac{dP}{dt}=\frac{1}{25000}P(t)\left(1000-P(t)\right),\quad P(0)=100$; இங்கு t ஆனது வருடங்களில் அளக்கப்படுகிறது, என்னும் அளக்கைக்குரிய வளர்ச்சி சமன்பாட்டை பூர்த்தி செய்கிறது எனக் கருதுக.

10 வருடங்களின் பின் சனத்தொகையானது $\frac{1000}{1+9e^{-\frac{2}{5}}}$ எனக்காட்டுக.

சனத்தொகை $P(t)$ இனுடைய நீண்ட கால நடத்தை என்ன?

5. (i) $\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)$ என்னும் முதலாம்படி ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு

$y(x)=e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx+C\right\}$ எனக்காட்டுக. இங்கு C என்பது எதேச்சை மாறிலியாகும்.

(ii) $z=\frac{1}{y}$ என்னும் பிரதியீட்டை பயன்படுத்தி $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}-4xy=e^x y^2$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை $\left(1+x^2\right)\frac{dz}{dx}+4xz=-e^x$ என்னும் ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு மாற்றுக.

இதிலிருந்து, $x=0$ ஆகும் போது $y=1$ எனத்தரப்படின் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

6. (i) $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0,\quad x>0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வினைக் காண்க.

(உதவிக்கு: முதலில் $y=x^n$ என்னும் வடிவத்திற்குரிய தீர்வைக் கவனிக்க.)

(ii) மாறிலி k இன் எந்த பெறுமானங்களுக்கு கீழே தரப்பட்டுள்ள வகையீட்டுச் சமன்பாடானது சைன்களையும் மற்றும் கோசைன்களையும் உள்ளடக்கிய பொதுத்தீர்வினை கொண்டுள்ளது.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4k\frac{dy}{dx}+4y=0.$$

(iii) D - செயலி முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் குறிப்பிட்ட தொகையீட்டைக் காண்க, மற்றும் இதிலிருந்து அதன் பொதுத்தீர்வினை பெறுக.

$$\left(D^2-5D+6\right)y=e^{2x}x^2,\ \text{இங்கு}\ \left(D\equiv\frac{d}{dx}\right).$$