00118

ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය - **2010/2011**
ව්‍යවහාරික ගණිතය - තුන්වන මට්ටම
APU1142/APE3142 – අවකල සමීකරණ

කාලය පැය දෙකයි.

දිනය : **2011.06.17** වේලාව - ප.ව. **9.30** - පෙ.ව. **11.30** දක්වා.

ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (a) $(y^2+1)(x+2)\dfrac{dy}{dx}=y(y^2+3)$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(b) සුදුසු ආදේශයක් භාවිතයෙන්, $xy\dfrac{dy}{dx}=x^2-xy+y^2$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(c) $\dfrac{dy}{dx}=v$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $2y\dfrac{d^2y}{dx^2}=1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ යන දෙවන ගණයෙහි අවකල සමීකරණය, $2vy\dfrac{dv}{dy}=1+v^2$ යන පළමුවන ගණයෙහි අවකල සමීකරණයට පරිණාමණය කරන්න. එනයින්, දී ඇති දෙවන ගණයෙහි අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

2. (a) $M, N, \dfrac{\partial M}{\partial y}$ සහ $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ යනු x සහ y හි සන්තතික ශ්‍රිත නම්, $M\,dx+N\,dy=0$ යන්න, සපිරි අවකල සමීකරණයක් වීම සඳහා අනිවාර්ය සහ ප්‍රමාණවත් අවශ්‍යතාවය සඳහන් කරන්න.

$\left(\cos 2y-3x^2y^2\right)dx+\left(\cos 2y-2x\sin 2y-2x^3y\right)dy=0$ සමීකරණය, සපිරි අවකල සමීකරණයක් බව පෙන්වා, එනයින්, සමීකරණය විසඳන්න.

(b) $\dfrac{dy}{dx}-F\left(\dfrac{y}{x}\right)=0$ සමීකරණයෙහි අනුකලන සාධකය $\dfrac{1}{xF\left(\frac{y}{x}\right)-y}$ බව පෙන්වන්න.

3. (a) පළමු ගණයේ ඒකජ අවකල සමීකරණය, $\dfrac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)$ හි සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(b) $z=\tan y$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\dfrac{dy}{dx}+x\sin(2y)=x^3\cos^2 y$ අවකල සමීකරණය, $\dfrac{dz}{dx}+2xz=x^3$ ඒකජ අවකල සමීකරණයට පරිණාමනය කරන්න.

එනයින්, $x=0$ විට $y=\dfrac{\pi}{4}$ නම්, ඉහත දී ඇති අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

4. m ස්කන්ධයෙන් යුතු අංශුවක් A ලක්ෂ්‍යයක සිට u ප්‍රවේගයෙන් සිරස් ලෙස ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. වාතයේ ප්‍රතිරෝධය mkv^2 වෙයි. මෙහි v යනු අංශුවේ ප්‍රවේගයයි. k යනු ධන නියතයකි. අංශුව A සිට x උසක තිබෙන විට එහි චලිත සමීකරණය ලියන්න.

අංශුව $h=\dfrac{1}{2k}\ln\left(1+\dfrac{k}{g}u^2\right)$ යන්නෙන් දෙනු ලබන h උපරිම උසකට නගින බව පෙන්වන්න.

තවද, අංශුව $\dfrac{1}{V^2}=\dfrac{1}{u^2}+\dfrac{k}{g}$ යන්නෙන් දෙනු ලබන V ප්‍රවේගයෙන් A වෙත යළි පැමිණෙන බව පෙන්වන්න.

$V<u$ හෝ $V>u$ වෙයි ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

5. (a) $(D-\alpha)^2 y=0$ අවකල සමීකරණයේ (මෙහි α යනු නියතයක් සහ $D\equiv\dfrac{d}{dx}$) සාධාරණ විසඳුම, $y(x)=(A+Bx)e^{\alpha x}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි A සහ B යනු අභිමත නියත වේ.

එනයින්, $(D^3+D^2-4)y=0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(b) පහත දැක්වෙන අවකල සමීකරණවල ව්‍යක්තික අනුකලය සෙවීමට "$D-$operator" ක්‍රමය භාවිතා කරන්න. එනයින්, ඒවා හි සාධාරණ විසඳුම් ලබාගන්න.

(i) $(D-1)(D-2)y=6e^{-x}$

(ii) $(D^4+4D^2)y=48x^2$.

6. (a) $f(x)=\ln x$ ශ්‍රිතය සඳහා $x=1$ ලක්ෂ්‍යය වටා ටේලර් ශ්‍රේණි ප්‍රසාරණය සොයන්න. තවද, මෙම ප්‍රසාරණයේ අභිසාරී ප්‍රාන්තරය සොයන්න.

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$ අවකල සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම, $x=0$ සාමාන්‍ය ලක්ෂ්‍යය වටා බල ශ්‍රේණියක් ඇසුරෙන් සොයන්න.

The Open University of Sri Lanka
B.Sc/B.Ed. Degree Programme
Final Examination - 2010/2011
Applied Mathematics - Level 03
APU1142/APE3142 – Differential Equations
Duration: - Two hours

Date: 17.06.2011 **Time: 9.30 a.m. - 11.30 a.m.**

Answer **FOUR** questions only.

1. (a) Solve the differential equation: $(y^2+1)(x+2)\dfrac{dy}{dx} = y(y^2+3)$

   (b) Using a suitable substitution, solve the differential equation $xy\dfrac{dy}{dx} = x^2 - xy + y^2$.

   (c) Using the substitution $\dfrac{dy}{dx} = v$, transform the second order differential equation

   $2y\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$, into the first order differential equation $2vy\dfrac{dv}{dy} = 1 + v^2$.

   Hence, solve the given second order differential equation.

2. (a) If $M, N, \dfrac{\partial M}{\partial y}$ and $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ are continuous functions of x and y, state a necessary and sufficient condition for $M\,dx + N\,dy = 0$ to be an exact equation.

   Show that the differential equation

   $\left(\cos 2y - 3x^2y^2\right)dx + \left(\cos 2y - 2x\sin 2y - 2x^3y\right)dy = 0$ is **exact**, and hence solve it.

   (b) Show that an integrating factor for the equation $\dfrac{dy}{dx} - F\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$ is $\dfrac{1}{xF\left(\dfrac{y}{x}\right) - y}$.

3. (a) Find the general solution of the first order linear differential equation

   $$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x).$$

   (b) Using the substitution $z = \tan y$, transform the differential equation

   $$\frac{dy}{dx} + x\sin(2y) = x^3\cos^2 y$$

   into the linear differential equation $\dfrac{dz}{dx} + 2xz = x^3$.

   Hence, solve the given differential equation if $y = \dfrac{\pi}{4}$ when $x = 0$.

4. A particle of mass m is projected vertically upwards with velocity u from a point A. The resistance of the air is mkv^2, where v is the velocity of the particle and k is a positive constant.

Write down the equation of motion when the particle is at a height x above A.

Show that the particle rises to a maximum height h is given by

$$h = \frac{1}{2k}\ln\left(1 + \frac{k}{g}u^2\right).$$

Show also that the particle will return to A with velocity V given by

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{k}{g}.$$

Is $V < u$ or $V > u$? Justify your answer.

5. (a) Show that the general solution to the differential equation $(D-\alpha)^2 y = 0$, where α is a constant and $D \equiv \frac{d}{dx}$, is $y(x) = (A + Bx)e^{\alpha x}$, where A and B are arbitrary constants.

Hence, solve the equation $(D^3 + 3D^2 - 4)y = 0$.

(b) Use the "$D-$operator" method to find the particular integral of the following differential equations and hence solve them:

(i) $(D-1)(D-2)y = 6e^{-x}$

(ii) $(D^4 + 4D^2)y = 48x^2$.

6. (a) Find the Taylor series expansion of the function $f(x) = \ln x$, about the point $x = 1$ and find the interval of convergence of the expansion.

(b) Find the general solution of the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, in terms of a power series about the ordinary point $x = 0$.

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞான/கல்வி பட்டப்பாடநெறி
இறுதிப் பரீட்சை – 2010/2011
பிரயோக கணிதம் – மட்டம் 03

APU1142/APE3142 – வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்

காலம் :- இரண்டு மணித்தியாலங்கள்.

நாள்: 17.06.2011 நேரம்: முப 9.30 - முப 11.30

நான்கு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

1. (a) $(y^2+1)(x+2)\dfrac{dy}{dx} = y(y^2+3)$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

   (b) பொருத்தமான பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி, $xy\dfrac{dy}{dx} = x^2 - xy + y^2$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

   (c) $\dfrac{dy}{dx} = v$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி, $2y\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ என்னும் இரண்டாம்படி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை $2vy\dfrac{dv}{dy} = 1 + v^2$ என்னும் முதலாம்படி வகையீட்டுச் சமன்பாடாக மாற்றுக. இதிலிருந்து தரப்பட்ட இரண்டாம்படி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

2. (a) $M, N, \dfrac{\partial M}{\partial y}$ மற்றும் $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ என்பன x மற்றும் y இலுள்ள தொடர்ச்சியான சார்புகள் ஆயின் $M\,dx + N\,dy = 0$ என்பது செப்பமான சமன்பாடு ஆவதற்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனையைக் குறிப்பிடுக.

   $\left(\cos 2y - 3x^2y^2\right)dx + \left(\cos 2y - 2x\sin 2y - 2x^3y\right)dy = 0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாடு செப்பமானது எனக்காட்டி இதிலிருந்து அதைத் தீர்க்க.

   (b) $\dfrac{dy}{dx} - F\left(y/x\right) = 0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டிற்கான தொகையீட்டுக் காரணி $\dfrac{1}{xF\left(y/x\right) - y}$ எனக்காட்டுக.

3. (a) $\dfrac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$ என்னும் முதலாம்படி ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வைக் காண்க.

   (b) $z = \tan y$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\dfrac{dy}{dx} + x\sin(2y) = x^3\cos^2 y$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை $\dfrac{dz}{dx} + 2xz = x^3$ என்னும் ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாடாக மாற்றுக. இதிலிருந்து $x = 0$ ஆகும் போது $y = \dfrac{\pi}{4}$ எனின் தரப்பட்டுள்ள வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

4. A என்னும் புள்ளி ஒன்றிலிருந்து m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்றானது வேகம் u உடன் மேல் நோக்கி நிலைக்குத்தாக எறியப்படுகின்றது. காற்றின் தடை mkv^2 ஆகும். இங்கு v துணிக்கையின் வேகம் மற்றும் k ஒரு நேர் மாறிலி ஆகும்.

துணிக்கையானது A இற்கு மேலே x என்னும் தூரத்தில் இருக்கும் போது அதன் இயக்கத்திற்கான சமன்பாட்டை எழுதுக.

துணிக்கையானது ஒரு அதியுயர் உயரம் h ஐ அடையும் போது $h=\frac{1}{2k}\ln\left(1+\frac{k}{g}u^2\right)$ எனத் தரப்படுகிறது எனக்காட்டுக.

மேலும், துணிக்கையானது A இற்கு வேகம் V உடன் திரும்பும் போது $\frac{1}{V^2}=\frac{1}{u^2}+\frac{k}{g}$ எனத் தரப்படுகிறது எனக்காட்டுக.

$V<u$ அல்லது $V>u$ ஆகுமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

5. (a) $(D-\alpha)^2 y=0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு $y(x)=(A+Bx)e^{\alpha x}$ ஆகும் எனக்காட்டுக. இங்கு α என்பது ஒரு மாறிலியும் $D\equiv\frac{d}{dx}$ உம் மற்றும் A , B என்பன எதேச்சை மாறிலிகளும் ஆகும்.
இதிலிருந்து $(D^3+3D^2-4)y=0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(b) " $D-$ செயலி" முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளின் குறிப்பிட்ட தொகையீட்டைக் கண்டு இதிலிருந்து பின்வருவனவற்றைத் தீர்க்க.

(i) $(D-1)(D-2)y=6e^{-x}$

(ii) $(D^4+4D^2)y=48x^2$.

6. (a) $f(x)=\ln x$ என்னும் சார்பின் தெயிலர் தொடர் விரிவை $x=1$ என்னும் புள்ளி பற்றி கண்டு விரிவின் ஒருங்கல் ஆயிடையைக் காண்க.

(b) $x=0$ என்னும் சாதாரணப் புள்ளி பற்றி $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வினை வலுத்தொடர் ஒன்றின் சார்பாக காண்க.
