ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය - 2010/2011
ව්‍යවහාරික ගණිතය - තුන්වන මට්ටම
AMU1182/AME3182 – කේතුක සහ දෛශික වීජය

කාලය පැය දෙකයි.

දිනය: 2011.07.11 වේලාව: පෙ.ව. 9.30 - පෙ.ව. 11.30 දක්වා.

ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (a) $x^2+y^2=a^2$ වෘත්තයට (x_1, y_1) ලක්ෂයයේ දී ඇඳි සපර්ශකයේ සමීකරණය $xx_1+yy_1=a^2$ බව සාධනය කරන්න.

   (b) (i) කේතුකයක සාධාරණ සමීකරණය $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ වේ. මෙහි a, b, h, g, f සහ c යනු නියතයන්ය. අක්ෂ පද්ධතිය, මූල ලක්ෂ්‍යය වටා θ කෝණයකින් භ්‍රමණය කිරීමෙන් ඉහත සමීකරණය $AX^2+BY^2+2GX+2FY+C=0$ ආකාරයට ඌණනය කල හැකි නම්, θ කෝණයෙහි අගය සොයන්න.

   (ii) පහත සමීකරණය ඉහත සම්මත ආකාරයට ඌණනය කර එනයින්, කේතුකය හඳුනාගන්න:
   $x^2+4xy+y^2=12$

2. $5x^2+2\sqrt{5}xy+y^2-x+y-5=0$ කේතුක සමීකරණය සලකන්න.

   (a) ඉහත සමීකරණය න්‍යාස ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න.

   (b) $\underline{A}$ මගින් දෙනු ලබන සංඝටිත න්‍යාසය ලියා, $\underline{P}^T\underline{A}\underline{P}=\underline{D}$ වන පරිදි $\underline{P}$ ප්‍රලම්භ න්‍යාසය සොයන්න. මෙහි $\underline{D}$ යනු විකර්ණ න්‍යාසයකි. එනයින්, දෙන ලද කේතුකය හඳුනාගන්න.

3. දෛශික දෙකක *තිත් ගුණිතය* අර්ථ දක්වන්න.

   (a) AB හා AC රේඛා අතර කෝණය සොයන්න. මෙහි A, B, C යනු පිළිවෙලින් සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසියානු ඛණ්ඩාංක $(1,\ 2,\ -1)$, $(2,\ 0,\ 3)$ සහ $(3,\ -1,\ 2)$ වන ලක්ෂ්‍ය තුනකි.

   (b) $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ දෛශික දෙක අතර කෝණය $\dfrac{2\pi}{3}$ සහ $|\underline{a}|=2$, $|\underline{b}|=5$ වේ. $\underline{p}=l\underline{a}+17\underline{b}$ සහ $\underline{q}=3\underline{a}-\underline{b}$ දෛශික දෙක ලම්භක වීම සඳහා l හි අගය සොයන්න.

   (c) $\underline{a}=\underline{i}+\underline{j}+\underline{k}$, $\underline{b}=\underline{i}-\underline{j}+\underline{k}$ සහ $\underline{c}=\underline{i}+\underline{j}-\underline{k}$ ලෙස ගනිමු.
   $(\underline{a}+2\underline{b})\cdot\left[\,\underline{a}+(\underline{a}\cdot\underline{c})\,\underline{b}\right]$ අගයන්න.

4. දෛශික දෙකක කතිර ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

(a) $\underline{i}, \underline{j}$ සහ $\underline{k}$ යනු එකිනෙකට ලම්බක ඒකක දෛශික නම් සහ $\underline{u}$ යනු අභිමත දෛශිකයක් විට, $(\underline{i}\cdot\underline{u})(\underline{i}\times\underline{u})+(\underline{j}\cdot\underline{u})(\underline{j}\times\underline{u})+(\underline{k}\cdot\underline{u})(\underline{k}\times\underline{u})=\underline{0}$ බව සාධනය කරන්න.

(b) $\underline{a},\underline{b}$ සහ $\underline{c}$ යනු $\underline{a}\times\underline{b}=3\underline{a}\times\underline{c}$ සහ $\underline{a}\neq\underline{0}$ වන පරිදි වූ දෛශික ලෙස ගනිමු.

(i) යම් λ අදිශයක් සඳහා, $\underline{b}=3\underline{c}+\lambda\underline{a}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\underline{b}\cdot\underline{c}=0$ නම්, එවිට $\lambda=\pm\sqrt{\dfrac{b^2+9c^2}{a^2}}$ බව පෙන්වන්න.

(c) $P(1, 2, 3)$, $Q(2,-2, 1)$ සහ $R(-1, 2, 3)$ ශීර්ෂ වන පරිදි PQR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

5. (a) පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{a}$ වන දෙන ලද A ලක්ෂ්‍යයක් තලයේ පවතින පරිදි සහ $\underline{n}$ නැමැති දෛශිකයකට ලම්බක වන ලෙස පවතින තලයේ සමීකරණය සොයන්න.

(b) $A(1, 5, 6)$ සහ $B(-1, 2, 0)$ හරහා යන රේඛාවට ලම්බක සහ $(1, 4, 5)$ ලක්ෂ්‍යය තලයේ පවතින පරිදි වූ තලයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

(c) $A(1, 1, 1)$, $B(1,-1, 1)$ සහ $C(-7,-3,-5)$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන තලයේ සමීකරණය සොයන්න. $(2,-3, 5)$ ලක්ෂ්‍යය තලයේ පවතින බව සත්‍යාපනය කරන්න.

6. (a) $\underline{u}$ සහ $\underline{v}$ යනු t හි දෛශික ශ්‍රිත ලෙස ගනිමු.

$\dfrac{d}{dt}(\underline{u}\cdot\underline{v})=\dfrac{d\underline{u}}{dt}\cdot\underline{v}-\underline{u}\cdot\dfrac{d\underline{v}}{dt}$ සහ $\dfrac{d}{dt}(\underline{u}\times\underline{v})=\dfrac{d\underline{u}}{dt}\times\underline{v}+\underline{u}\times\dfrac{d\underline{v}}{dt}$ බව සාධනය කරන්න.

(b) $\underline{r}=\underline{a}\,e^{nt}+\underline{b}\,e^{-nt}$ නම්, $\dfrac{d^2\underline{r}}{dt^2}\times\underline{r}=\underline{0}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ යනු නියත දෛශික වන අතර n යනු නියතයකි.

(c) අංශුවක පිහිටුම් දෛශිකය, $\underline{r}=c\cos t\,\underline{i}+c\sin t\,\underline{j}+ct\tan\alpha\,\underline{k}$ මගින් දී ඇත. මෙහි c සහ α නියත වේ. t කාලයේ දී, ප්‍රවේගය, $\underline{v}$ සහ ත්වරණය, $\underline{a}$ සොයන්න.

එනයින්, $\underline{v}^2=c^2\sec^2\alpha$ සහ $|\underline{v}\times\underline{a}|^2=c^4\sec^2\alpha$ බව පෙන්වන්න.

The Open University of Sri Lanka
B.Sc/B.Ed Degree Programme
Final Examination - 2010/2011
Applied Mathematics – Level 3
AMU1182/AME3182 - Conics and Vector Algebra

Duration :- Two hours

Date:- 11.07.2011 **Time:- 9.30a.m-11.30a.m**

Answer Four Questions Only

1. (a) Prove that the equation of the tangent to the circle $x^2+y^2=a^2$ at the point (x_1, y_1) is $xx_1+yy_1=a^2$.

   (b) (i) The general equation of a conic is $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$, where a, b, h, g, f and c are constants. By rotating the axes about the origin through an angle θ, the above equation can be reduced to the form $AX^2+BY^2+2GX+2FY+C=0$. Find the value of angle θ.

   (ii) Reduce the following equation to the above standard form and hence identify the conic.

   $x^2+4xy+y^2=12$

2. Consider the conic equation $5x^2+2\sqrt{5}xy+y^2-x+y-5=0$.

   (a) Express the above equation in matrix form.

   (b) Write down the associated matrix $\underline{A}$, and find an orthogonal matrix $\underline{P}$ such that $\underline{P}^T\underline{A}\underline{P}=\underline{D}$, where $\underline{D}$ is a diagonal matrix.
   Hence identify the given conic.

3. Define the dot product of two vectors.

   (a) Find the angle between the lines AB, AC, where A, B and C are the three points with rectangular cartesian coordinates $(1, 2, -1), (2, 0, 3)$ and $(3, -1, 2)$ respectively.

   (b) The vectors $\underline{a}$ and $\underline{b}$ make an angle of $\frac{2\pi}{3}$ and $|\underline{a}|=2$, $|\underline{b}|=5$. Find the value of l for which the vectors $\underline{p}=l\,\underline{a}+17\,\underline{b}$ and $\underline{q}=3\underline{a}-\underline{b}$ are perpendicular.

   (c) Let $\underline{a}=\underline{i}+\underline{j}+\underline{k}$, $\underline{b}=\underline{i}-\underline{j}+\underline{k}$ and $\underline{c}=\underline{i}+\underline{j}-\underline{k}$. Evaluate $(\underline{a}+2\underline{b}).[\,\underline{a}+(\underline{a}\cdot\underline{c})\,\underline{b}\,]$.

4. Define the cross product of two vectors.

(a) If $\underline{i}, \underline{j}$ and $\underline{k}$ are mutually perpendicular unit vectors, and $\underline{u}$ is an arbitrary vector, prove that $(\underline{i} \cdot \underline{u})(\underline{i} \times \underline{u}) + (\underline{j} \cdot \underline{u})(\underline{j} \times \underline{u}) + (\underline{k} \cdot \underline{u})(\underline{k} \times \underline{u}) = \underline{0}$.

(b) Let $\underline{a}, \underline{b}$ and $\underline{c}$ be vectors such that $\underline{a} \times \underline{b} = 3\underline{a} \times \underline{c}$, and $\underline{a} \neq \underline{0}$.

(i) Show that $\underline{b} = 3\underline{c} + \lambda \underline{a}$ for some scalar λ.

(ii) If $\underline{b} \cdot \underline{c} = 0$, then show that $\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{b^2 + 9c^2}{a^2}}$.

(c) Find the area of the triangle PQR whose vertices are at the points $P(1, 2, 3)$, $Q(2, -2, 1)$ and $R(-1, 2, 3)$.

5. (a) Find the equation of a plane containing a given point A with the position vector $\underline{a}$ and perpendicular to the vector $\underline{n}$.

(b) Find the equation of the plane containing the point $(1, 4, 5)$ and perpendicular to the line containing $A(1, 5, 6)$ and $B(-1, 2, 0)$.

(c) Find the equation of the plane passing through the three points $A(1, 1, 1)$, $B(1, -1, 1)$ and $C(-7, -3, -5)$. Verify that the point $(2, -3, 5)$ is on that plane.

6. (a) Let $\underline{u}$ and $\underline{v}$ be vector functions of t. Prove that $\dfrac{d}{dt}(\underline{u} \cdot \underline{v}) = \dfrac{d\underline{u}}{dt} \cdot \underline{v} - \underline{u} \cdot \dfrac{d\underline{v}}{dt}$ and

$$\frac{d}{dt}(\underline{u} \times \underline{v}) = \frac{d\underline{u}}{dt} \times \underline{v} + \underline{u} \times \frac{d\underline{v}}{dt}.$$

(b) If $\underline{r} = \underline{a}\, e^{nt} + \underline{b}\, e^{-nt}$, where $\underline{a}$ and $\underline{b}$ are constant vectors and n is a constant, then prove that $\dfrac{d^2\underline{r}}{dt^2} \times \underline{r} = \underline{0}$.

(c) The position vector $\underline{r}$ of a particle is given by $\underline{r} = c\cos t\, \underline{i} + c\sin t\, \underline{j} + ct\tan\alpha\, \underline{k}$, where c and α are constants. Obtain the velocity $\underline{v}$ and the acceleration $\underline{a}$ at time t. Hence, show that $\underline{v}^2 = c^2 \sec^2 \alpha$ and $|\underline{v} \times \underline{a}|^2 = c^4 \sec^2 \alpha$.

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞானமாணி/கல்விமாணிப் பட்டப்பாடநெறி
இறுதிப் பரீட்சை - 2010/2011
பிரயோக கணிதம் – மட்டம் 03
AMU1182/AME3182 – கூம்புவளைவும் காவி அட்சரகணிதமும்

காலம் :- இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

நாள் :- 11-07-2011 நேரம்:- மு.ப 9.30– மு.ப 11.30

நான்கு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

1. (a) $x^2+y^2=a^2$ என்னும் வட்டத்திற்கு $(x_1,\ y_1)$ என்னும் புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடலியின் சமன்பாடு $xx_1+yy_1=a^2$ ஆகுமென நிறுவுக.

(b) (i) கூம்புவளைவு ஒன்றின் பொதுச் சமன்பாடு $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ஆகும், இங்கு a,b,h,g,f மற்றும் c என்பன மாறிலிகளாகும். அச்சுக்களை θ கோணம் ஒன்றினூடாக உற்பத்தி பற்றி சுழற்றுவதன் மூலம் $AX^2+BY^2+2GX+2FY+C=0$ என்னும் வடிவத்திற்கு ஒடுக்கலாம். கோணம் θ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) பின்வரும் சமன்பாட்டை மேற்கூறப்பட்ட நியம வடிவத்திற்கு ஒடுக்கி இதிலிருந்து கூம்புவளைவை இனங்காண்க.

$$x^2+4xy+y^2=12$$

2. $5x^2+2\sqrt{5}xy+y^2-x+y-5=0$ என்னும் கூம்புவளைவின் சமன்பாட்டைக் கருதுக.

(a) மேற்கூறப்பட்ட சமன்பாட்டை தாயவடிவில் தருக.

(b) இத்துடன் தொடர்புடைய தாயம் $\underline{A}$ ஐ எழுதி, $\underline{P}^T\,\underline{A}\underline{P}=\underline{D}$ ஆக அமையுமாறு நிமிர்கோணத்தாயம் $\underline{P}$ ஐக் காண்க, இங்கு $\underline{D}$ ஆனது மூலைவிட்டத்தாயமாகும்.
இதிலிருந்து தரப்பட்ட கூம்புவளைவை இனங்காண்க.

3. இரு காவிகளின் எண்ணிப் பெருக்கத்தை வரையறுக்க.

(a) AB, AC என்னும் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க, இங்கு A, B மற்றும் C என்பன முறையே $(1,\ 2,\ -1), (2,\ 0,\ 3)$ மற்றும் $(3,\ -1,\ 2)$ என்னும் செங்கோண தெக்காட்டின் ஆள் கூறுகளுடனான மூன்று புள்ளிகள் ஆகும்.

(b) $\underline{a}$ மற்றும் $\underline{b}$ என்னும் காவிகள் $\frac{2\pi}{3}$ என்னும் கோணமொன்றை ஆக்குவதோடு $|\underline{a}|=2,\ |\underline{b}|=5$ உம் ஆகும். காவிகள் $\underline{p}=l\,\underline{a}+17\underline{b}$ மற்றும் $\underline{q}=3\underline{a}-\underline{b}$ செங்குத்தாக அமையுமாறு l இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(c) $\underline{a}=\underline{i}+\underline{j}+\underline{k},\ \ \underline{b}=\underline{i}-\underline{j}+\underline{k}$ மற்றும் $\underline{c}=\underline{i}+\underline{j}-\underline{k}$ ஆகும். $(\underline{a}+2\underline{b}).\left[\,\underline{a}+(\underline{a}\cdot\underline{c})\,\underline{b}\right]$ ஐக் கணிக்க.

4. இரு காவிகளின் காவிப்பெருக்கத்தை வரையறுக்க.

(a) $\underline{i}, \underline{j}$ மற்றும் $\underline{k}$ என்பன தம்முள் செங்குத்தாகவுள்ள அலகுக் காவிகளும் $\underline{u}$ என்பது ஒரு எதேச்சைக் காவியும் ஆயின் $(\underline{i} \cdot \underline{u})(\underline{i} \times \underline{u}) + (\underline{j} \cdot \underline{u})(\underline{j} \times \underline{u}) + (\underline{k} \cdot \underline{u})(\underline{k} \times \underline{u}) = \underline{0}$ என நிறுவுக.

(b) $\underline{a}, \underline{b}$ மற்றும் $\underline{c}$ என்பன $\underline{a} \times \underline{b} = 3\underline{a} \times \underline{c}$, மற்றும் $\underline{a} \neq \underline{0}$ ஆகுமாறுள்ள காவிகள் என்க.

(i) சில எண்ணி λ களுக்கு $\underline{b} = 3\underline{c} + \lambda\underline{a}$ எனக்காட்டுக.

(ii) $\underline{b} \cdot \underline{c} = 0$ எனின், $\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{b^2 + 9c^2}{a^2}}$ எனக்காட்டுக.

(c) $P(1, 2, 3)$, $Q(2, -2, 1)$ மற்றும் $R(-1, 2, 3)$ என்னும் புள்ளிகளில் உச்சிகளைக் கொண்ட முக்கோணி PQR இன் பரப்பளவைக் காண்க.

5. (a) $\underline{a}$ ஐத் தானக்காவியாக உடைய தரப்பட்ட புள்ளி A யினூடாக செல்வதும், $\underline{n}$ என்னும் காவிக்கு செங்குத்தாகவுள்ளதுமான தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(b) $(1, 4, 5)$ என்னும் புள்ளியைக் கொண்டதும் $A(1, 5, 6)$ மற்றும் $B(-1, 2, 0)$ என்னும் புள்ளிளைக் கொண்ட கோட்டிற்கு செங்குத்தாகவுள்ளதுமான தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(c) $A(1, 1, 1)$, $B(1, -1, 1)$ மற்றும் $C(-7, -3, -5)$ என்னும் மூன்று புள்ளிகளினூடாக செல்லும் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. $(2, -3, 5)$ என்னும் புள்ளி அத்தளத்தின் மீதுள்ளதா என வாய்ப்புப் பார்க்க.

6. (a) $\underline{u}$ மற்றும் $\underline{v}$ என்பன t இன் காவிச்சார்புகள் என்க. $\dfrac{d}{dt}(\underline{u} \cdot \underline{v}) = \dfrac{d\underline{u}}{dt} \cdot \underline{v} - \underline{u} \cdot \dfrac{d\underline{v}}{dt}$ மற்றும் $\dfrac{d}{dt}(\underline{u} \times \underline{v}) = \dfrac{d\underline{u}}{dt} \times \underline{v} + \underline{u} \times \dfrac{d\underline{v}}{dt}$ என நிறுவுக.

(b) $\underline{r} = \underline{a}\, e^{nt} + \underline{b}\, e^{-nt}$ எனின் $\dfrac{d^2\underline{r}}{dt^2} \times \underline{r} = \underline{0}$ என நிறுவுக. இங்கு $\underline{a}$ மற்றும் $\underline{b}$ என்பன மாறிலிக் காவிகள் மற்றும் n என்பது மாறிலியாகும்.

(c) ஒரு துணிக்கையின் தானக்காவி $\underline{r}$ ஆனது $\underline{r} = c\cos t\, \underline{i} + c\sin t\, \underline{j} + ct\tan\alpha\, \underline{k}$ எனத் தரப்படுகின்றது. இங்கு c மற்றும் α என்பன மாறிலிகளாகும். வேகம் $\underline{v}$ மற்றும் ஆர்முடுகல் $\underline{a}$ என்பவற்றை நேரம் t இல் பெறுக.

இதிலிருந்து $\underline{v}^2 = c^2 \sec^2\alpha$ மற்றும் $|\underline{v} \times \underline{a}|^2 = c^4 \sec^2\alpha$ எனக் காட்டுக.