ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය - **2010/2011**
ව්‍යවහාරික ගණිතය - තුන්වන මට්ටම
AMU1181/AME3181 – අවකල සමීකරණ

කාලය පැය දෙකයි.

දිනය : **2011.06.17** වේලාව - පෙ.ව. **9.30** - පෙ.ව. **11.30** දක්වා.

ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (a) a, b, A යනු දී ඇති නියත සහ $a \neq 1$ සඳහා $u_0 = A$ විට, $u_{r+1} = au_r + b$ සමාවර්තිතා සම්බන්ධයේ සාධාරණ විසඳුම, $u_n = Ba^n - \dfrac{b}{a-1}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $B = A + \dfrac{b}{a-1}$ වේ.

$a = 1$ නම් ඉහත සමාවර්තිතා සම්බන්ධයේ සාධාරණ විසඳුම කුමක් ද?

$u_0 = 3$ විට $u_{r+1} = 4u_r + 6$ සමාවර්තිතා සම්බන්ධයේ ව්‍යක්තික විසඳුම සොයන්න.

(b) $u_{r+1} = \dfrac{3}{2}u_r + u_{r-1}$ සමාවර්තිතා සම්බන්ධයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

$u_0 = 1,\ u_1 = -\dfrac{1}{2}$ නම්, n විශාල අගයක් බවට පත්වන විට ව්‍යක්තික විසඳුමට කුමක් සිදුවේද?

2. (a) $ax^2 + by^2 = c$ යන්න, $x\left\{y\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\} = y\dfrac{dy}{dx}$ අවකල සමීකරණයෙහි විසඳුමක් බව පෙන්වන්න; මෙහි a, b සහ c යනු නියත වේ.

(b) $y(0) = 2$ සමඟ $\dfrac{dy}{dx} = y - x$ අවකල සමීකරණය සලකන්න.

(i) "ඔයිලර් ක්‍රමය" සඳහා පියවර දිග 0.25 වන පරිදි සමාවර්තිතා සම්බන්ධය ලියා දක්වන්න.

(ii) පියවර දිග 0.25 භාවිතයෙන්, $y(1)$ ට ඔයිලර් ක්‍රම සන්නිකර්ෂණය ගණනය කරන්න.

3. (a) $(y^2+1)(x+2)\dfrac{dy}{dx} = y(y^2+3)$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(b) සුදුසු ආදේශයක් භාවිතයෙන්, $xy\dfrac{dy}{dx} = x^2 - xy + y^2$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(c) $\dfrac{dy}{dx} = v$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $2y\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ යන දෙවන ගණයෙහි අවකල සමීකරණය, $2vy\dfrac{dv}{dy} = 1 + v^2$ යන පළමුවන ගණයෙහි අවකල සමීකරණයට පරිණාමණය කරන්න.

එනයින්, දී ඇති දෙවන ගණයෙහි අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

4. (a) පළමු ගණයේ ඒකජ අවකල සමීකරණය, $\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)$ හි සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(b) $z=\tan y$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\frac{dy}{dx}+x\sin(2y)=x^3\cos^2 y$ අවකල සමීකරණය, $\frac{dz}{dx}+2xz=x^3$ ඒකජ අවකල සමීකරණයට පරිණාමනය කරන්න.

එනයින්, $x=0$ විට $y=\frac{\pi}{4}$ නම්, ඉහත දී ඇති අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

5. m ස්කන්ධයෙන් යුතු අංශුවක් A ලක්ෂ්‍යයක සිට u ප්‍රවේගයෙන් සිරස් ලෙස ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. වාතයේ ප්‍රතිරෝධය mkv^2 වේයි. මෙහි v යනු අංශුවේ ප්‍රවේගයයි. k යනු ධන නියතයකි. අංශුව A සිට x උසක තිබෙන විට එහි චලිත සමීකරණය ලියන්න.

අංශුව $h=\frac{1}{2k}\ln\left(1+\frac{k}{g}u^2\right)$ යන්නෙන් දෙනු ලබන h උපරිම උසකට නගින බව පෙන්වන්න.

තවද, අංශුව $\frac{1}{V^2}=\frac{1}{u^2}+\frac{k}{g}$ යන්නෙන් දෙනු ලබන V ප්‍රවේගයෙන් A වෙත යළි පැමිණෙන බව පෙන්වන්න.

$V<u$ හෝ $V>u$ වේයි ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

6. (a) $(D-\alpha)^2\,y=0$ අවකල සමීකරණයේ (මෙහි α යනු නියතයක් සහ $D\equiv\frac{d}{dx}$) සාධාරණ විසඳුම, $y(x)=(A+Bx)e^{\alpha x}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි A සහ B යනු අභිමත නියත වේ.

එනයින්, $(D^3+D^2-4)\,y=0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(b) පහත දැක්වෙන අවකල සමීකරණවල විශේෂිත අනුකලය සෙවීමට "$D-$operator" ක්‍රමය භාවිතා කරන්න. එනයින්, ඒවායේ සාධාරණ විසඳුම් ලබාගන්න.

(i) $(D-1)(D-2)\,y=6e^{-x}$

(ii) $(D^4+4D^2)\,y=48x^2$.

The Open University of Sri Lanka
B.Sc/B.Ed. Degree Programme
Final Examination - 2010/2011
Applied Mathematics - Level 03
AMU 1181/AME 3181 – Differential Equations
Duration: -Two hours.

Date: 17.06.2011 **Time: 9.30 a.m. - 11.30 a.m.**

Answer **FOUR** questions only.

1. (a) Given that a, b, A are constants, show that the general solution of the recurrence relation $u_{r+1} = au_r + b$, for $a \neq 1$ with $u_0 = A$, is $u_n = Ba^n - \frac{b}{a-1}$; where $B = A + \frac{b}{a-1}$. What is the general solution of the above recurrence relation if $a = 1$?

   Find the particular solution for the recurrence relation $u_{r+1} = 4u_r + 6$ with $u_0 = 3$.

   (b) Find the general solution of the recurrence relation $u_{r+1} = \frac{3}{2}u_r + u_{r-1}$.

   If $u_0 = 1$, $u_1 = -\frac{1}{2}$, what happens to the particular solution as n becomes large?

2. (a) Show that $ax^2 + by^2 = c$ is a solution of the differential equation

$$x\left\{y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} = y\frac{dy}{dx}; \text{ where } a, b \text{ and } c \text{ are constants.}$$

   (b) Consider the differential equation $\frac{dy}{dx} = y - x$ with $y(0) = 2$.

   (i) write down the recurrence relation for Euler's method with step length 0.25.

   (ii) using the step length 0.25, calculate the Euler's method approximation to $y(1)$.

3. (a) Solve the differential equation: $(y^2+1)(x+2)\frac{dy}{dx} = y(y^2+3)$

   (b) Using a suitable substitution, solve the differential equation $xy\frac{dy}{dx} = x^2 - xy + y^2$.

   (c) Using the substitution $\frac{dy}{dx} = v$, transform the second order differential equation

   $2y\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, into the first order differential equation $2vy\frac{dv}{dy} = 1 + v^2$.

   Hence, solve the given second order differential equation.

4. (a) Find the general solution of the first order linear differential equation

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x).$$

(b) Using the substitution $z=\tan y$, transform the differential equation

$$\frac{dy}{dx}+x\sin(2y)=x^3\cos^2 y$$

into the linear differential equation $\frac{dz}{dx}+2xz=x^3$.

Hence, solve the given differential equation if $y=\frac{\pi}{4}$ when $x=0$.

5. A particle of mass m is projected vertically upwards with velocity u from a point A. The resistance of the air is mkv^2, where v is the velocity of the particle and k is a positive constant.

Write down the equation of motion when the particle is at a height x above A.

Show that the particle rises to a maximum height h is given by

$$h=\frac{1}{2k}\ln\left(1+\frac{k}{g}u^2\right).$$

Show also that the particle will return to A with velocity V, is given by

$$\frac{1}{V^2}=\frac{1}{u^2}+\frac{k}{g}.$$

Is $V<u$ or $V>u$? Justify your answer.

6. (a) Show that the general solution to the differential equation $(D-\alpha)^2\,y=0$, where α is a constant and $D\equiv\frac{d}{dx}$, is $y(x)=(A+Bx)e^{\alpha x}$, where A and B are arbitrary constants.

Hence, solve the equation $\left(D^3+3D^2-4\right)y=0$.

(b) Use the "$D-$operator" method to find the particular integral of the following differential equations and hence solve them:

(i) $(D-1)(D-2)\,y=6e^{-x}$

(ii) $\left(D^4+4D^2\right)y=48x^2$.

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞான/கல்வி பட்டப்பாடநெறி
இறுதிப் பரீட்சை - **2010/2011**
பிரயோக கணிதம் – மட்டம் **03**
AMU1181/AME3181 – வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்

காலம் :- இரண்டு மணித்தியாலங்கள்.

நாள்: **17.06.2011** நேரம்: மு.ப **9.30** - மு.ப **11.30**

நான்கு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

1. (a) a, b, A என்பன மாறிலிகள் எனத் தரப்பட்டுள்ளன, $u_0 = A$ உடன், $a \neq 1$ ஆக $u_{r+1} = au_r + b$ என்னும் மடங்குத் தொடர்பின் பொதுத் தீர்வு $u_n = Ba^n - \dfrac{b}{a-1}$ ஆகும் எனக்காட்டுக, இங்கு $B = A + \dfrac{b}{a-1}$ ஆகும். $a = 1$ ஆயின் மேலுள்ள மடங்குத் தொடர்பின் பொதுத் தீர்வு என்ன.
$u_0 = 3$ உடன் $u_{r+1} = 4u_r + 6$ என்னும் மடங்குத் தொடர்பின் குறிப்பிட்ட தீர்வினைக் காண்க.

(b) $u_{r+1} = \dfrac{3}{2}u_r + u_{r-1}$ என்னும் மடங்குத் தொடர்பின் பொதுத் தீர்வினைக் காண்க.
$u_0 = 1,\ u_1 = -\dfrac{1}{2}$ உடனான குறிப்பிட்ட தீர்வில் n அதிகரிக்கும் போது குறிப்பிட்ட தீர்விற்கு என்ன நடைபெறும்?

2. (a) $ax^2 + by^2 = c$ என்பது $x\left\{y\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\} = y\dfrac{dy}{dx}$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாகும் எனக்காட்டுக, இங்கு a, b மற்றும் c என்பன மாறிலிகள் ஆகும்.

(b) $y(0) = 2$ உடன் $\dfrac{dy}{dx} = y - x$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைக் கருதுக.

(i) படி நீளம் 0.25 ஆகவுள்ள ஒயிலரின் முறைக்குரிய மடங்குத்தொடர்பை எழுதுக.

(ii) படி நீளம் 0.25 ஐ பயன்படுத்தி $y(1)$ இற்கு ஒயிலரின் முறை அண்ணளவாக்கத்தைக் கணிக்க.

3. (a) $(y^2+1)(x+2)\dfrac{dy}{dx} = y(y^2+3)$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(b) பொருத்தமான பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி, $xy\dfrac{dy}{dx} = x^2 - xy + y^2$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(c) $\dfrac{dy}{dx} = v$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி, $2y\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ என்னும் இரண்டாம்படி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை $2vy\dfrac{dv}{dy} = 1 + v^2$ என்னும் முதலாம்படி வகையீட்டுச் சமன்பாடாக மாற்றுக. இதிலிருந்து தரப்பட்ட இரண்டாம்படி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

4. (a) $\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)$ என்னும் முதலாம்படி ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வைக் காண்க.

(b) $z=\tan y$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\frac{dy}{dx}+x\sin(2y)=x^3\cos^2 y$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை $\frac{dz}{dx}+2xz=x^3$ என்னும் ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாடாக மாற்றுக. இதிலிருந்து $x=0$ ஆகும் போது $y=\frac{\pi}{4}$ எனத் தரப்படின் முதலாவது வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

5. A என்னும் புள்ளி ஒன்றிலிருந்து m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்றானது வேகம் u உடன் மேல் நோக்கி நிலைக்குத்தாக எறியப்படுகின்றது. காற்றின் தடை mkv^2 ஆகும். இங்கு v துணிக்கையின் வேகம் மற்றும் k ஒரு நேர் மாறிலி ஆகும்.

துணிக்கையானது A இற்கு மேலே x என்னும் தூரத்தில் இருக்கும் போது அதன் இயக்கத்திற்கான சமன்பாட்டை எழுதுக.

துணிக்கையானது ஒரு அதியுயர் உயரம் h ஐ அடையும் போது $h=\frac{1}{2k}\ln\left(1+\frac{k}{g}u^2\right)$ எனத் தரப்படுகிறது எனக்காட்டுக.

மேலும், துணிக்கையானது A இற்கு வேகம் V உடன் திரும்பும் போது $\frac{1}{V^2}=\frac{1}{u^2}+\frac{k}{g}$ எனத் தரப்படுகிறது எனக்காட்டுக.

$V<u$ அல்லது $V>u$ ஆகுமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

6. (a) $(D-\alpha)^2\,y=0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு $y(x)=(A+Bx)e^{\alpha x}$ ஆகும் எனக்காட்டுக. இங்கு α என்பது ஒரு மாறிலி, $D\equiv\frac{d}{dx}$ மற்றும் A மற்றும் B என்பன எதேச்சை மாறிலிகள் ஆகும்.
இதிலிருந்து $(D^3+3D^2-4)\,y=0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(b) "D – செயலி" முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளின் குறிப்பிட்ட தொகையீட்டைக் கண்டு இதிலிருந்து பின்வருவனவற்றைத் தீர்க்க.

(i) $(D-1)(D-2)\,y=6e^{-x}$

(ii) $(D^4+4D^2)\,y=48x^2$.
