

ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය - 2011/2012
ව්‍යවහාරික ගණිතය - ක්‍රීත්වන මට්ටම
APU1142/APE3142 - අවකල සමීකරණ



කාලය පැය දෙකයි.

දිනය : 2012.11.13

වේලාව - පෙ.ව. 9.30 - පෙ.ව. 11.30 දක්වා.

ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (a) $\frac{y(x-1)(y+2)}{x(x+2)(y-1)} \left(\frac{dy}{dx} \right) = 1$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x+2y+1}{6x+4y-1}$ අවකල සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම ලියන්න.

(c) සුදුසු ආදේශයක් භාවිතයෙන්, පහත දැක්වෙන දෙවන ගණයේ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \left(\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{dy}{dx} \right).$$

2. (a) පළමු සභයේ මාත්‍රය එක වන, $M dx + N dy = 0$ අවකල සමීකරණය සපිරි සමීකරණයක් වීම

සඳහා අනිවාර්ය සහ ප්‍රමාණවත් අවශ්‍යතාවය නිර්ණය කරන්න; මෙහි M සහ N යනු x සහ y හි ශ්‍රිත වේ.

(b) $x dx + y dy = \frac{a^2 (x dy - y dx)}{x^2 + y^2}$ අවකල සමීකරණය, සපිරි අවකල සමීකරණයක් බව පෙන්වන්න;

මෙහි a යනු නියතයකි. එනමින්, එය විසඳන්න.

3. (a) පළමු සභයේ ඒකජ අවකල සමීකරණය, $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ හි සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(b) $z = \frac{1}{y}$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$ අවකල සමීකරණය,

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x} z = -\frac{1}{x} \ln x$$
 ඒකජ අවකල සමීකරණයට පරිණාමනය කරන්න.

එනමින්, දී ඇති අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

4. C ගුවන් යානයක්, l දිගැති AB ධාවන පර්යත A කෙළවරට U වේගයෙන් ගොඩබැස, τ කාලයකට පසු B හි දී නිශ්චලතාවයට පැමිණෙයි. බිමේ ප්‍රතිරෝධය හා වාතයේ ප්‍රතිරෝධය පිළිවෙළින් ගුවන් යානයේ ඒකක ස්කන්ධයකට a හා bv^2 වෙයි. මෙහි v යනු ගුවන් යානයේ ප්‍රවේගය ද a, b යනු නියත ද වෙයි. t වෙලාවේ දී C ගුවන් යානය A කෙළවරේ සිට x දුරකින් වන විට, ගුවන් යානයේ චලිතයේ සමීකරණය ලියන්න.

(v, t) සහ (x, t) විචල්‍යවල අවකල සමීකරණ ලබාගෙන

(i) $U = \sqrt{\frac{a}{b}} \tan(\sqrt{ab} \tau)$ බවත්

(ii) $l = \frac{1}{2b} \ln\left(1 + \frac{b}{a} U^2\right)$ බවත්

පෙන්වන්න.

5. (a) $(D-k)^2 y = 0$ අවකල සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න; මෙහි k යනු නියතයක් සහ

$$D \equiv \frac{d}{dx} \text{ වේ.}$$

එනමින්, $(D^3 - 4D^2 + 5D - 2)y = 0$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

- (b) පහත දැක්වෙන අවකල සමීකරණවල ව්‍යාප්තික අනුකලය සෙවීමට “ D -operator” ක්‍රමය

භාවිතා කරන්න. එනමින්, ඒවා විසඳන්න:

(i) $(D^2 + 16)y = 2 \cos^2 x$

(ii) $(D^3 - D)y = e^x$.

6. (a) $x = 0$ යනු $2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} - (1+x)y = 0$ අවකල සමීකරණයේ සවිධි අපූර්ව ලක්ෂ්‍යයක් බව

පෙන්වන්න.

මෙම අවකල සමීකරණය සඳහා $x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ආකාරයේ ඒකීය ලෙස ස්වයන්ත ශ්‍රේණිය විසඳුම්

දෙකක් සොයන්න. එනමින්, ඉහත අවකල සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

- (b) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ අන්තර සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

The Open University of Sri Lanka
 B.Sc/B.Ed. Degree Programme
 Final Examination - 2011/2012
 Applied Mathematics - Level 03
 APU1142/APE3142 – Differential Equations



Duration: - Two hours

Date: 13.11.2012

Time: 9:30 a.m. – 11:30 a.m.

Answer FOUR questions only.

1. (a) Solve the differential equation: $\frac{y(x-1)(y+2)}{x(x+2)(y-1)} \left(\frac{dy}{dx} \right) = 1$

(b) Write the general solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{3x+2y+1}{6x+4y-1}$

(c) Using a suitable substitution solve the following second order differential equation:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \left(\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{dy}{dx} \right)$$

2. (a) Determine the necessary and sufficient condition for the first order and first degree differential equation, $M dx + N dy = 0$ to be an exact equation, where M and N are functions of x and y .

(b) Show that the differential equation $x dx + y dy = \frac{a^2 (x dy - y dx)}{x^2 + y^2}$, where a is a constant is exact. Hence solve it.

3. (a) Find the general solution of the first order linear differential equation

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

(b) Using the substitution $z = \frac{1}{y}$, transform the differential equation

$$x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$$

into the linear differential equation $\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x} \ln x$.

Hence, solve the given differential equation.

4. An aircraft C lands at the end A of a runway AB of length l with speed U and comes to rest at B after a time τ . The ground and air resistances are a and bv^2 per unit mass of the aircraft respectively, where v is the velocity of the aircraft and a, b are constants.

Write down the equation of motion of the aircraft C when it is at a distance x from the end A at time t . Obtain the differential equation in (v, t) and (x, t) variables and hence, show that

$$(i) \quad U = \sqrt{\frac{a}{b}} \tan(\sqrt{ab} \tau),$$

$$(ii) \quad l = \frac{1}{2b} \ln\left(1 + \frac{b}{a} U^2\right).$$

5. (a) Find the **general solution** of the differential equation $(D-k)^2 y = 0$, where k is

a constant and $D \equiv \frac{d}{dx}$.

Hence, solve the equation $(D^3 - 4D^2 + 5D - 2)y = 0$.

- (b) Use the “ D -operator” method to find the **particular integral** of each of the following differential equation and hence solve them:

$$(i) \quad (D^2 + 16)y = 2 \cos^2 x$$

$$(ii) \quad (D^3 - D)y = e^x.$$

6. (a) Show that $x = 0$ is a **regular singular point** of the differential equation

$$2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} - (1+x)y = 0.$$

Find two linearly independent series solutions of the form $x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ for this differential equation.

Hence, find the general solution of the above differential equation.

- (b) Find the general solution of the difference equation $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$.

இலங்கைதிறந்தபல்கலைக்கழகம்
 விஞ்ஞானமாணி/கல்விமாணிபட்டப்பாடநெறி
 இறுதிப் பரீட்சை 2011/2012
 பிரயோககணிதம் - மட்டம் 03
 APU 1142/APE 3142 - வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்



காலம் :- இரண்டுமணித்தியாலங்கள்.

நாள் :- 13-11-2012.

நேரம்:- முய9.30-முய11.30

நான்குவினாக்களுக்குமட்டும் விடையளிக்குக.

1.(a) $\frac{y(x-1)(y+2)}{x(x+2)(y-1)} \left(\frac{dy}{dx} \right) = 1$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்குக.

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x+2y+1}{6x+4y-1}$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டிற்குரிய எல்லாதீர்வுகளையும் காண்க.

(c) பொருத்தமான பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி இரண்டாம் படிவகையீட்டுச் சமன்பாடு

$x \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \left(\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{dy}{dx} \right)$ ஐத் தீர்க்குக.

2.(a) முதலாம் வரிசைமற்றும் முதலாம் படிவகையீட்டுச் சமன்பாடு $Mdx + Ndy = 0$ ஆனது, செப்பமான சமன்பாடாக இருப்பதற்கான வேண்டிய போதிய நிபந்தனையைத் துணிக. இங்கு M மற்றும் N என்பன x மற்றும் y இலுள்ள சார்புகளாகும்.

(b) வகையீட்டுச் சமன்பாடு $x dx + y dy = \frac{a^2(xdy - ydx)}{x^2 + y^2}$ ஆனது, செப்பமானது எனக் காட்டி, இதிலிருந்து தீர்க்குக. இங்கு a ஒரு மாறிலி ஆகும்.

3.(a) முதலாம் படி ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாடு $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ இனுடைய

பொதுத்தீர்வினைக்கான்க.

(b) $z = \frac{1}{y}$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி வகையீட்டுச் சமன்பாடு $x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$ ஐ,

ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாடு $\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x} \ln x$ இற்கு உருமாற்றுக.

இதிலிருந்து தரப்பட்ட வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்குக.

4. ஒருவிமானம் C ஆனது நீளம் l ஆகவுள்ள ஒருபாதை AB இன் முடிவு A இல் வேகம் U உடன் தரையிறங்கி நேரம் τ இற்குப் பிறகு B இல் ஓய்வுக்கு வருகிறது. விமானத்தின் அலகு திணிவுக்கான தரமற்றும் வளிக்கூரியதடைகள் முறையே a மற்றும் bv^2 , இங்கு v என்பது விமானத்தின் வேகமும் மற்றும் a, b ஆகியன மாறிலிகளுமாகும். நேரம் t இல் முடிவு A இலிருந்தான தூரம் x ஆக இருக்கும் போது விமானம் C இன் இயக்கத்திற்குரிய சமன்பாட்டை எழுதுக. வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை (v, t) மற்றும் (x, t) மாறிகளில் பெற்று

$$(i) U = \sqrt{\frac{a}{b}} \tan(\sqrt{ab}\tau),$$

$$(ii) l = \frac{1}{2b} \ln\left(1 + \frac{b}{a} U^2\right) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

5.(a) வகையீட்டுச் சமன்பாடு $(D-k)^2 y = 0$, இனுடைய பொதுத்தீர்வினைக்கான்க. இங்கு k ஒரு மாறிலியும் $D \equiv \frac{d}{dx}$ உம் ஆகும்.

இதிலிருந்து $(D^3 - 4D^2 + 5D - 2)y = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்குக.

(b) D -செயலிமுறையைப் பாவித்து பின்வரும் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளின் குறிப்பிட்ட தொகையீடுகளைக் கண்டு இதிலிருந்து அவற்றைத் தீர்க்குக.

$$(i) (D^2 + 16)y = 2 \cos^2 x$$

$$(ii) (D^3 - D)y = e^x.$$

6.(a) $2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} - (1+x)y = 0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் ஒழுங்கான

தனிச்சிறப்புப்புள்ளி $x = 0$ எனக் காட்டுக.

இந்தவகையீட்டுச் சமன்பாட்டிற்குரிய இரண்டு ஏகபரிமாணமுறையாய்ச் சாராத

தொடரித்தீர்வுகளை $x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ என்னும் வடிவத்தில் காண்க. இதிலிருந்து மேற்றரப்பட்ட

வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினுடைய பொதுத்தீர்வினைக் காண்க.

(b) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினுடைய பொதுத்தீர்வினைக் காண்க.