ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය

විද්‍යාවේදී / අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව

ශුද්ධ ගණිතය - තුන්වන මට්ටම

අවසාන පරීක්ෂණය - 2012/2013

PUU1142/PUE3142 – දෛශික අවකාශ

කාලය: පැය දෙකයි.

දිනය :- **2013.12.18** වේලාව :- ප.ව. **1:30** - ප.ව.**3:30** දක්වා

ප්‍රශ්ණ හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1 (a) V යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයක් වේ. දෛශික අවකාශයන්හි ප්‍රත්‍යක්ෂ භාවිත කර, සියලු පියවර සනාථ කරමින් සියලුම $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ සහ $\alpha(\neq 0) \in F$ සඳහා $\alpha(\underline{u}+\underline{v}) = \alpha(\underline{w}+\underline{v})$ නම් $\underline{u} = \underline{w}$ බව පෙන්වන්න.

(b) පහත දී ඇති (i) සහ (ii) කර්මයන් යටතේ $\mathbb{R}^2$ කුලකය $\mathbb{R}$ මත දෛශික අවකාශයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

(i) $(a, b)+(a', b') = (0, b+b')$; $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$,

(ii) $(a, b)+(a', b') = (a+a', b+b')$; $\alpha(a, b) = (\alpha^2 a, \alpha^2 b)$.

(c) $(a, b), (c, d)$ යනු $\mathbb{R}$ මත ඇති $\mathbb{R}^2$ දෛශික අවකාශයේ ඕනෑම දෛශික දෙකක් වේ. (a, b) සහ (c, d) ඒකජ ලෙස ගෙන පරායත්ත නම් $ad = bc$ බව සාධනය කරන්න.

2 (a) W_1 සහ W_2 යන්න F ක්ෂේත්‍රය මත ඇති V දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශ දෙකක් ලෙස ගනිමු. ප්‍රතිනිදසුන් දෙමින් $W_1 \cup W_2$ යන්න අනිවාර්යයෙන්ම V හි උපාවකාශයක් විය යුතු නොවන බව පෙන්වන්න. තවද $W_1 \cup W_2$ යන්න V හි උපවකාශයක් වීමට අවශ්‍ය තත්ත්වයන් නිර්ණය කරන්න.

(b) V යනු $\mathbb{R}$ සිට $\mathbb{R}$ ට පවතින සියලු ශ්‍රිතයන් පවතින $\mathbb{R}$ මත ඇති දෛශික අවකාශයක් වේ. $W = \{f \mid f \in V$ සහ $f(-x) = f(x)$; සියළු $x \in \mathbb{R}\}$ යන්න V හි උප කුලකයක් නම්, W, V හි උපාවකාශයක් බව පෙන්වන්න.

(c) සාමාන්‍ය කර්ම යටතේ $V = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ යන්න, $\mathbb{R}$ මත $\mathbb{R}^3$ හි උපාවකාශයක් වේද යන්න නිර්ණය කරන්න.

3 (a) L_S යනු V දෛශික අවකාශයේ උපකුලකයක් වන S හි සියළු ඒකජ සංයෝජනයන් ගෙන් සෑදුනු කුලකය ලෙස ගත්විට S කුලකයෙන් V මත පරායත උපාවකාශය L_S බව සාධනය කරන්න.

(b) $W_1 = \{(a, b, c, d) \mid b - 2c + d = 0\}$ සහ $W_2 = \{(a, b, c, d) \mid \mathrm{a} = \mathrm{d},\ \mathrm{b} = 2c\}$ යන්න $\mathbb{R}^4$ හි උපාවකාශයන් දෙකක් ලෙස දී ඇත්නම් W_1 සහ $W_1 \cap W_2$ සඳහා පදනම හා මානයන් සොයන්න.

(c) W යනු මාත්‍රය ≤ 3 වන පරිදි පවතින සියලු තාත්ත්වික අගයන්ගෙන් යුත් බහුපදයන්ගේ උපාවකාශයක් ලෙස ගෙන $\{1, (2-x), (3+x^2), (4-x^3)\}$ කුලකය W හි පදනමක් බව පෙන්වන්න.

4 (a) V සහ W යන්න F ක්ෂේත්‍රය මත පවතින දෛශික අවකාශ ලෙස සලකා $T: \mathrm{V} \to W$ යන්න ඒකජ පරිණාමනයක් වන විට $Ker(T)$ යන්න V හි උපාවකාශයක් බව සාධනය කරන්න.

(b) T_1 සහ T_2 යනු V සිට W ට පවතින ඒකජ පරිණාමනයන් දෙකක් වන අතර $\underline{u} \in V, \alpha \in F$ වේ. $T(\underline{u}) = \alpha T_1(\underline{u}) + T_2(\underline{u})$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇති අනුරූපණය V සිට W ට පවතින ඒකජ පරිණාමනයක් බව සාධනය කරන්න.

(c) සියලු පියවර සනාථ කරමින් $(1, 2, 3)$ සහ $(4, 5, 6)$ මඟින් ප්‍රතිබිම්භය ජනනය වන $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ලෙස පවතින ඒකජ පරිණාමනයක් සොයන්න.

5 (a) $\underline{u}, \underline{v}$ යනු E යුක්ලිඩ් අවකාශයේ ඕනෑම දෛශික දෙකක් වේ. $\underline{v}$ හි E මත ප්‍රතිමානය අර්ථ දක්වන්න.

(i) $\langle \underline{u}, (4+3i)\, \underline{v} \rangle$ නම් $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = (3+2i)$ සුළු කරන්න.

(ii) $\langle \underline{u} - 2\underline{v}, 3\underline{u} + 4\underline{v} \rangle = 3\|\underline{u}\|^2 - 2\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle - 8\|\underline{v}\|^2$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ ප්‍රාභිලම්බ නම් $\langle 2\underline{w}_1 + \underline{w}_2 - \underline{w}_3 + 3\underline{w}_4, \underline{w}_1 + 4\underline{w}_2 - 3\underline{w}_3 \rangle$ විසඳන්න.

(iv) සියලු $\underline{u}, \underline{v} \in E$ සඳහා $\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 + \|\underline{u}-\underline{v}\|^2 = 2\left(\|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2\right)$ බව සාධනය කරන්න. එනයින් $\underline{u}, \underline{v}$ ප්‍රාභිලම්බ වෙයි නම් $\underline{u}$ හා $\underline{v}$ අතර දුර සොයන්න.

(b) $\underline{u} = (x_1, x_2, x_3)$ සහ $\underline{v} = (y_1, y_2, y_3)$ යනු $\mathbb{R}^3$ අන්තඃගුණිත අවකාශයේ දෛශික දෙකක් වේ නම් $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ යන්න $\mathbb{R}^3$ හි අන්තඃගුණිතයක් වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

116

6 (a) E අන්තඃගුණිත අවකාශය මත $\underline{u}$, $\underline{v}$ යන දෛශික දෙකෙහි ප්‍රලම්භතාව අර්ථ දක්වන්න.

(b) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ වන $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u} D \underline{v}^T$ ලෙස පවතින අන්තඃගුණිතය යටතේ $\underline{u} = (1, 1, 1)$ දෛශිකයට ප්‍රලම්භ වන පරිදි $\mathbb{R}^3$ අන්තඃගුණිත අවකාශයේ $\underline{v} = (x_1, x_2, x_3)$ කුලකය සොයන්න.

(c) P_n යනු $\langle \underline{p}, \underline{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt$ අන්තඃගුණිතය යටතේ වූ සියලු බහුපදයන්ගෙන් යුත් දෛශික අවකාශයක් නම් Gram-Schmidt ඇල්ගොරිතමය භාවිතයෙන් $\{1, t, t^2, t^3\}$ කුලකයෙන් ප්‍රලම්භ කුලකයක් ලබා ගන්න.

117

00062

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞானமாணி/ கல்விமாணிப்பட்டப் பாடநெறி
இறுதிப் பரீட்சை – 2012/2013
தூய கணிதம் – மட்டம் 03
PUU1142/ PUE3142 – காவி வெளிகள்

காலம் :- இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

நாள் :- 18.12.2013 நேரம்:- பி.ப 1.30- பி.ப 3.30

நான்கு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

1 (a) V என்பது F என்னும் தரப்பட்ட புலமொன்றில் காவி வெளியொன்றென்க. காவி வெளிகளின் வெளிப்படை உண்மைகளைப் பாவித்து, ஒவ்வொரு படிகளையும் நியாயப்படுத்துவதன் மூலம், எல்லா $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ மற்றும் $\alpha(\neq 0) \in F$ களுக்கு $\alpha(\underline{u}+\underline{v}) = \alpha(\underline{w}+\underline{v})$ எனின் $\underline{u} = \underline{w}$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

(b) கீழே பகுதி (i) மற்றும் (ii) இல் தரப்பட்டுள்ள செய்கைகளுக்கு அமைய $\mathbb{R}^2$ ஆனது $\mathbb{R}$ இன் மேல் காவி வெளியொன்றல்ல எனக் காட்டுக:

(i) $(a, b)+(a', b') = (0, b+b')$; $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$,

(ii) $(a, b)+(a', b') = (a+a', b+b')$; $\alpha(a, b) = (\alpha^2 a, \alpha^2 b)$.

(c) (a, b) மற்றும் (c, d) என்பன புலம் F இன் மேல் காவி வெளி $\mathbb{R}^2$ இல் யாதாயினும் இரண்டு காவிகள் என்க. (a, b) மற்றும் (c, d) என்பன ஏகபரிமாணக சார்ந்தவைகளாயின் $ad = bc$ ஆகும் என நிறுவுக.

2 (a) W_1 மற்றும் W_2 என்பன F என்னும் புலமொன்றில் காவி வெளி V இல் இரண்டு உபவெளிகளென்க.

எதிர் உதாரணமொன்றை வழங்குவதன் மூலம், $W_1 \cup W_2$ ஆனது V இன் உபவெளியொன்றாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை எனக் காட்டுக.
எந்த நிபந்தனைகளின் கீழ் $W_1 \cup W_2$ ஆனது V இன் ஒரு உபவெளியாகும்.

(b) V ஆனது $\mathbb{R}$ என்னும் புலத்தில் $\mathbb{R}$ முதல் $\mathbb{R}$ வரையான எல்ல சார்புகளினதும் காவி வெளியொன்றென்க.
$W = \{f \mid f \in V$ மற்றும் $x \in \mathbb{R}$ இற்கு $f(-x) = f(x)\}$ ஆனது V இன் ஒரு உப தொடையென்க.
W ஆனது V இன் ஒரு உபவெளி எனக் காட்டுக.

(c) $W = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ என்னும் தொடையானது $\mathbb{R}$ இன் மேல் $\mathbb{R}^3$ இல் வழமையான செய்கைகளுடன் ஒரு உபவெளியா என துணிக.

1/8

3 (a) L_S என்பது V என்னும் காவி வெளியொன்றிலுள்ள S என்னும் உப தொடையின் மூலகங்களின் எல்லா ஏகபரிமாண சேர்மானங்களின் தொடையாகும் என்க. L_s ஆனது S இனால் பாவிய உப வெளிகளிலொன்று என நிறுவுக.

(b) W_1 மற்றும் W_2 எனபன முறையே $W_1 = \{(a, b, c, d) \mid b - 2c + d = 0\}$ மற்றும் $W_2 = \{(a, b, c, d) \mid \mathrm{a} = \mathrm{d},\ \mathrm{b} = 2c\}$ என்னும் $\mathbb{R}^4$ இன் இரண்டு உபவெளிகள் என்க. W_1 மற்றும் $W_1 \cap W_2$ ஒவ்வொன்றினதும் ஒரு மூலம் மற்றும் அதன் பரிமாணம் என்பவற்றைக் காண்க.

(c) W என்பது படி ≤ 3 உடனுள்ள எல்லா மெய் பெறுமான பல்லுறுப்பிகளின் உபவெளியொன்று என்க. $\{1, (2-x), (3+x^2), (4-x^3)\}$ என்னும் தொடை W இன் ஒரு மூலம் எனக் காட்டுக.

4 (a) F என்னும் புலமொன்றில் V மற்றும் W என்பன காவி வெளிகளாயுள்ளதுடன் $T: \mathrm{V} \to W$ என்பது ஏகபரிமாண உருமாற்றமுமாக உள்ளது என்க. T இன் அகணி V இன் ஒரு உபவெளியாகும் என நிறுவுக.

(b) T_1 மற்றும் T_2 என்பன V முதல் W வரையான இரண்டு ஏகபரிமாண உருமாற்றங்கள் மேலும் $\underline{u} \in V, \alpha \in F$ என்க. $\mathrm{T}(\underline{u}) = \alpha\, \mathrm{T}_1(\underline{u}) + \mathrm{T}_2(\underline{u})$ என வரையறுக்கப்படும் படம் T ஆனது V முதல் W வரையான ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றமாகும் என நிறுவுக.

(c) ஒவ்வொரு படிகளையும் நியாயப் படுத்துவதன் மூலம் $(1, 2, 3)$ மற்றும் $(4, 5, 6)$ என்பவற்றால் உருவாக்கப்படுகின்ற விம்பத்தைக் கொண்ட ஏகபரிமாண உருமாற்றமொன்றைக் காண்க.

5 (a) $\underline{u}$ மற்றும் $\underline{v}$ என்பன E என்னும் ஊக்கிளிட்டு வெளியொன்றிலுள்ள யாதாயினும் இரண்டு காவிகள் என்க. காவி $\underline{v}$ இன் நியதியை வரையறுக்க.

(i) $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = (3+2i)$ எனின் $\langle \underline{u}, (4+3i)\, \underline{v} \rangle$ என்பதை சுருக்குக,

(ii) $\langle \underline{u} - 2\underline{v}\ , 3\underline{u} + 4\underline{v} \rangle = 3\|\underline{u}\|^2 - 2\langle \underline{u}\ , \underline{v} \rangle - 8\|\underline{v}\|^2$ எனக் காட்டுக

(iii) $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ என்பது நிமிர் செவ்வன் எனின் $\langle 2\underline{w}_1 + \underline{w}_2 - \underline{w}_3 + 3\underline{w}_4\ ;\ \underline{w}_1 + 4\underline{w}_2 - 3\underline{w}_3 \rangle$ ஐத் தீர்க்க,

(iv) எல்லா $\underline{u}, \underline{v} \in E$ களுக்கும் $\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 + \|\underline{u}-\underline{v}\|^2 = 2\left(\|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2\right)$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து $\underline{u}$ மற்றும் $\underline{v}$ என்பன நிமிர் செவ்வன் காவிகள் எனின் அவற்றுக்கிடையிலான தூரத்தைக் காண்க.

(b) $\underline{u} = (x_1\, , x_2\, , x_3)$ மற்றும் $\underline{v} = (y_1\, , y_2\, , y_3)$ என்பன $\mathbb{R}^3$ என்னும் உட்பெருக்க வெளியொன்றிலுள்ள இரண்டு காவிகள் என்க.

$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ என்பது $\mathbb{R}^3$ இல் ஒரு உட்பெருக்கமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

00062

6 (a) E என்னும் உட்பெருக்க வெளியொன்றில் இரண்டு காவிகள் $\underline{u}$, $\underline{v}$ என்பவற்றின் நிமிர்கோணவியல்பை வரையறுக்க.

(b) $\mathbb{R}^3$ என்னும் உட்பெருக்க வெளியில் உட்பெருக்கம் $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u} D \underline{v}^T$ இற்கு அமைய $\underline{u} = (1, 1, 1)$ என்னும் காவிக்கு நிமிர்கோணமாகுமாறு உள்ள காவிகளின் தொடையைக் காண்க, இங்கு $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

(c) P_n என்பது $\langle \underline{p}, \underline{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt$ என்னும் உட்பெருக்கத்தைக் கொண்ட எல்லா பல்லுறுப்பிகளினதும் காவி வெளி என்க.

கிராம்சிமிற்றர் நிமிர்கோணவாக்க செயற்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $\{1, t, t^2, t^3\}$ இற்கு நிமிர்கோண தொடையைப் பெறுக.

120

00122

The Open University of Sri Lanka
B. Sc/ B. Ed Degree Programme
Final Examination - 2012/2013
Pure Mathematics-Level 03
PUU1142/ PUE3142 – Vector Spaces

Duration:-Two hours

Date:-18.12.2013 **Time:- 1.30p.m.- 3.30p.m.**

Answer FOUR questions only.

1 (a) Let V be a vector space over a given field F. Use the axioms of vector spaces to show, by justifying every step, that

if $\alpha(\underline{u}+\underline{v})=\alpha(\underline{w}+\underline{v})$, then $\underline{u}=\underline{w}$ for all $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\in V$ and $\alpha(\neq 0)\in F$.

(b) Show that the set $\mathbb{R}^2$ is not a vector space over $\mathbb{R}$ under the operations given in (i) and (ii) below:

(i) $(a, b)+(a', b')=(0, b+b')$; $\alpha(a, b)=(\alpha a, \alpha b)$,

(ii) $(a, b)+(a', b')=(a+a', b+b')$; $\alpha(a, b)=(\alpha^2 a, \alpha^2 b)$.

(c) Let (a, b) and (c, d) be any two vectors in the vector space $\mathbb{R}^2$ over the field $\mathbb{R}$.

Prove that if (a, b) and (c, d) are linearly dependent then $ad=bc$.

2 (a) Let W_1 and W_2 be two subspaces of a vector space V over a field F.

By giving a counter example, show that $W_1\cup W_2$ is not necessarily a subspace of V.

Determine conditions under which $W_1\cup W_2$ is a subspace of V.

(b) Let V be a vector space, over the field $\mathbb{R}$, of all functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$.

Let $W=\{f\mid f\in V \text{ and } f(-x)=f(x);\ \text{for } x\in\mathbb{R}\}$ be a subset of V.

Show that W is a subspace of V.

(c) Determine whether the set $V=\{(a, b, c)\mid a, b, c\in\mathbb{Q}\}$ is a subspace of $\mathbb{R}^3$ over $\mathbb{R}$ with the usual operations.

3 (a) Let L_S be the set of all linear combinations of elements of a subset S of a vector space V. Prove that L_S is a subspace spanned by the set S in V.

(b) Let W_1 and W_2 be two subspaces of $\mathbb{R}^4$ given by $W_1 = \{(a, b, c, d) \mid b - 2c + d = 0\}$ and $W_2 = \{(a, b, c, d) \mid \mathrm{a} = \mathrm{d},\ \mathrm{b} = 2c\}$ respectively.

Find a basis and dimension of each of W_1 and $W_1 \cap W_2$.

(c) Let W be a subspace of all real valued polynomials with degree ≤ 3.

Show that the set $\{1, (2-x), (3+x^2), (4-x^3)\}$ is a basis of W.

4 (a) Let V and W be vector spaces over the field F and $T: \mathrm{V} \to W$ be a linear transformation. Prove that $Ker(T)$ is a subspace of V.

(b) Let T_1 and T_2 be two linear transformations from V into W and $\underline{u} \in V, \alpha \in F$.

Prove that the mapping T defined by $\mathrm{T}(\underline{u}) = \alpha \mathrm{T}_1(\underline{u}) + \mathrm{T}_2(\underline{u})$ is a linear transformation from V into W.

(c) By justifying each step, find a linear transformation $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ whose image is generated by $(1, 2, 3)$ and $(4, 5, 6)$.

5 (a) Let $\underline{u}$, $\underline{v}$ be any two vectors in an Euclidean space E. Define *norm* of vector $\underline{v}$ in E.

(i) Simplify $\langle \underline{u}, (4+3i)\,\underline{v} \rangle$, if $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = (3+2i)$,

(ii) Show that $\langle \underline{u} - 2\underline{v}, 3\underline{u} + 4\underline{v} \rangle = 3\|\underline{u}\|^2 - 2\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle - 8\|\underline{v}\|^2$,

(iii) Solve $\langle 2\underline{w}_1 + \underline{w}_2 - \underline{w}_3 + 3\underline{w}_4, \underline{w}_1 + 4\underline{w}_2 - 3\underline{w}_3 \rangle$, if $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ is orthonormal,

(iv) Prove that $\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 + \|\underline{u} - \underline{v}\|^2 = 2\left(\|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2\right)$ for all $\underline{u}, \underline{v} \in E$.

Hence find the distance between $\underline{u}$ and $\underline{v}$, if they are orthonormal vectors.

(b) Let $\underline{u} = (x_1, x_2, x_3)$ and $\underline{v} = (y_1, y_2, y_3)$ be two vectors of an inner product space $\mathbb{R}^3$.

Is $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ an inner product in $\mathbb{R}^3$? Justify your answer.

6 (a) Define the *orthogonality* of two vectors $\underline{u}$, $\underline{v}$ in an inner product space E.

(b) Find the set of vectors $\underline{v} = (x_1, x_2, x_3)$ in the inner product space $\mathbb{R}^3$ that are orthogonal to the vector $\underline{u} = (1, 1, 1)$ with respect to the inner product $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u} D \underline{v}^T$, where

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(c) Let P_n be the vector space of all polynomials with inner product $\langle \underline{p}, \underline{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt$.

Apply the Gram-Schmidt algorithm to the set $\{1, t, t^2, t^3\}$ to obtain an orthogonal set.