ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය - 2012/2013
ව්‍යවහාරික ගණිතය - තුන්වන මට්ටම
APU1142/APE3142 – අවකල සමීකරණ

කාලය පැය දෙකයි.

දිනය : **2013.11.26** වේලාව - පෙ.ව. **9.30** - පෙ.ව. **11.30** දක්වා.

ප්‍රශ්න **හතරකට පමණක්** පිළිතුරු සපයන්න.

1. (a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2\, e^{x^3+y}$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(b) සුදුසු ආදේශයක් මගින් $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x+1}{y+x+5}$ අවකල සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(c) $\dfrac{dy}{dx} = v$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $2y\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ යන දෙවන ගණයෙහි අවකල සමීකරණය, $2vy\dfrac{dv}{dy} = 1 + v^2$ යන පළමුවන ගණයෙහි අවකල සමීකරණයට පරිණාමණය කරන්න.

එනයින්, දී ඇති දෙවන ගණයෙහි අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

2. $M, N, \dfrac{\partial M}{\partial y}$ සහ $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ යනු x සහ y හි සන්තතික ශ්‍රිත නම්, $M\,dx + N\,dy = 0$ යන්න, සපිරි අවකල සමීකරණයක් වීම සඳහා අනිවාර්ය සහ ප්‍රමාණවත් අවශ්‍යතාවය සඳහන් කරන්න.

(i) $x^\alpha y^\beta$ යන්න, $x^3y^3\left(2y\,dx + x\,dy\right) = \left(5y\,dx + 7x\,dy\right)$ සමීකරණයෙහි අනුකලන සාධකය නම්, p සහ q හි අගය සොයන්න.

(ii) $\left(x\sqrt{x^2+y^2} - y\right)dx + \left(y\sqrt{x^2+y^2} - x\right)dy = 0$ අවකල සමීකරණය, සපිරි අවකල සමීකරණයක් බව පෙන්වා, එනයින් එය විසඳන්න.

3. $e^{\int P(x)dx}$ යන්න, $\dfrac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$ ඒකජ අවකල සමීකරණය සඳහා අනුකලන සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

එනයින්, පහත දැක්වෙන අවකල සමීකරණය විසඳන්න:

(i) $\sec x\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = y + \sin x$

(ii) $(2xy + x^2 + x^4)dx - (1 + x^2)dy = 0$

(iii) $y^2dx + (3xy - 1)dy = 0$.

4. (a) එක්තරා සත්ත්ව විශේෂයක සංගණනය $P(t)$ ලෙස ගනිමු.

$P(t)$ යන්න, $\dfrac{dP}{dt}=\dfrac{1}{2500}P(t)\big(100-P(t)\big)$; $P(0)=10$, ප්‍රවර්ධන සමීකරණය තෘප්ත කරන්නේ යැයි උපකල්පනය කරමු; මෙහි t අවුරුදුවලින් මැන ඇත.

අවුරුදු 10 කට පසු සත්ත්ව ගහනය සොයන්න.

(b) m ස්කන්ධයෙන් යුතු අංශුවක් A ලක්ෂ්‍යයක සිට u ප්‍රවේගයෙන් සිරස් ලෙස ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. වාතයේ ප්‍රතිරෝධය mkv^2 වෙයි. මෙහි v යනු අංශුවේ ප්‍රවේගයයි. k යනු ධන නියතයකි. අංශුව A සිට x උසක තිබෙන විට එහි චලිත සමීකරණය ලියන්න. අංශුව $h=\dfrac{1}{2k}\ln\left(1+\dfrac{k}{g}u^2\right)$ යන්නෙන් දෙනු ලබන h උපරිම උසකට නගින බව පෙන්වන්න.

5. (a) පහත දැක්වෙන එක් එක් අවකල සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(i) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-(\alpha+\beta)\dfrac{dy}{dx}+(\alpha\beta)y=0$,

(ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\alpha\dfrac{dy}{dx}+(\alpha^2+\beta^2)y=0$, මෙහි $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(b) පහත දැක්වෙන අවකල සමීකරණයේ ව්‍යක්තික අනුකලය සෙවීමට "$D-$operator" ක්‍රමය භාවිතා කරන්න. එනයින්, එය විසඳන්න.

$\left(D^2+2D+1\right)y=x\cos x$, මෙහි $D\equiv\dfrac{d}{dx}$.

6. (a) $x=0$ යනු $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x(1-x)\dfrac{dy}{dx}-y=0$ අවකල සමීකරණයේ සවිධි අපූර්ව ලක්ෂ්‍යයක් බව පෙන්වන්න.

මෙම අවකල සමීකරණය සඳහා $x^s\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ආකාරයේ ඒකීය ලෙස ස්වායත්ත ශ්‍රේණිය විසඳුම් දෙකක් සොයන්න. එනයින්, සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(b) $a_{n+2}-4a_{n+1}+13a_n=0$ අන්තර සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

104

00063

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞானமாணி/ கல்விமாணி பட்டப்பாடநெறி
இறுதிப் பரீட்சை 2012/2013
பிரயோக கணிதம் – மட்டம் 03
APU1142/ APE3142 – வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்

காலம் :- இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

நாள் :- 26-11-2013 நேரம்:- மு.ப9.30– மு.ப11.30

நான்கு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

1. (a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2\, e^{x^3+y}$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்குக.

(b) பொருத்தமான பிரதியீடொன்றைப் பயன்படுத்தி $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x+1}{y+x+5}$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வினைக் காண்க.

(c) $\dfrac{dy}{dx} = v$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி, $2y\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ என்னும் இரண்டாம் படி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை, $2vy\dfrac{dv}{dy} = 1 + v^2$ என்னும் முதலாம் படி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு உருமாற்றுக. இதிலிருந்து, தரப்பட்ட இரண்டாம் படி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்குக.

2. $M, N, \dfrac{\partial M}{\partial y}$ மற்றும் $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ என்பன x மற்றும் y இலுள்ள தொடர்ச்சியான சார்புகள் ஆயின் $M\,dx + N\,dy = 0$ என்பது செப்பமான சமன்பாடு ஆவதற்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனையைக் கூறுக.

(i) $x^{\alpha} y^{\beta}$ என்பது $x^3 y^3 (2y\,dx + x\,dy) = (5y\,dx + 7x\,dy)$ என்னும் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணியெனின், α மற்றும் β என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $\left(x\sqrt{x^2+y^2} - y\right)dx + \left(y\sqrt{x^2+y^2} - x\right)dy = 0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாடு செப்பமானது எனக் காட்டுவதுடன் இதிலிருந்து அதைத் தீர்க்குக.

3. $e^{\int P(x)dx}$ என்பது $\dfrac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$ என்னும் ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணியெனக் காட்டுக. இதிலிருந்து, பின்வரும் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்குக:

(i) $\sec x\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = y + \sin x$.

(ii) $(2xy + x^2 + x^4)dx - (1 + x^2)dy = 0$.

(iii) $y^2 dx + (3xy - 1)dy = 0$.

105

4. (a) $P(t)$ என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட விலங்கு இனத்தின் சனத்தொகை என்க. $P(t)$ ஆனது

$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2500} P(t)\left(100 - P(t)\right), \quad P(0) = 10$ என்னும் அளக்கைக்குரிய வளர்ச்சி வீதத்தினை திருப்திப்படுத்துகின்றது என கொள்க, இங்கு t ஆனது வருடங்களில் அளக்கப்படுகிறது.

10 வருடங்களின் பின்னரான சனத்தொகையினைக் காண்க.

(b) A என்னும் புள்ளி ஒன்றிலிருந்து m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்றானது வேகம் u உடன் மேல் நோக்கி நிலைக்குத்தாக எறியப்படுகின்றது. காற்றின் தடை mkv^2 ஆகும். இங்கு v துணிக்கையின் வேகம் மற்றும் k ஒரு நேர் மாறிலி ஆகும். துணிக்கையானது A இற்கு மேலே x என்னும் தூரத்தில் இருக்கும் போது அதன் இயக்கத்திற்கான சமன்பாட்டை எழுதுக.

துணிக்கையானது ஒரு அதியுயர் உயரம் h ஐ அடையும் போது $h = \frac{1}{2k} \ln\left(1 + \frac{k}{g} u^2\right)$ எனத் தரப்படுகிறது எனக்காட்டுக.

5. (a) பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளினதும் பொதுத் தீர்வினைக் காண்க:

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} - (\alpha + \beta)\frac{dy}{dx} + (\alpha\beta)y = 0$,

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\alpha\frac{dy}{dx} + (\alpha^2 + \beta^2)y = 0$, இங்கு $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(b) D–செயலிமுறையைப் பாவித்து பின்வரும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் குறிப்பிட்ட தொகையீட்டைக் கண்டு இதிலிருந்து அதன் பொதுத்தீர்வினைப் பெறுக:

$\left(D^2 + 2D + 1\right)y = x\cos x$, இங்கு $D \equiv \frac{d}{dx}$.

6. (a) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x(1-x)\frac{dy}{dx} - y = 0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் ஒரு ஒழுங்கான தனிச்சிறப்புப் புள்ளி $x = 0$ எனக் காட்டுக.

இந்த வகையீட்டுச் சமன்பாட்டிற்குரிய இரண்டு ஏகபரிமாண முறையாய்ச் சாராத தொடரித் தீர்வுகளை $x^s\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ என்னும் வடிவத்தில் கண்டு இதிலிருந்து, பொதுத்தீர்வினைக் காண்க.

(b) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 13a_n = 0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வினைக் காண்க.

00196

The Open University of Sri Lanka
B.Sc/B.Ed. Degree Programme
Final Examination - 2012/2013
Applied Mathematics - Level 03
APU1142/APE3142 – Differential Equations

Duration: - Two hours

Date: 26.11.2013 **Time: 9:30 a.m. – 11:30 a.m.**

Answer **FOUR** questions only.

1. (a) Solve the differential equation: $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2 e^{x^3+y}$.

   (b) Using a suitable substitution find the general solution of the differential equation: $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x+1}{y+x+5}$.

   (c) Using the substitution $\frac{dy}{dx} = v$, transform the second order differential equation $2y\frac{d^2y}{dx^2} = 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, into the first order differential equation $2vy\frac{dv}{dy} = 1+v^2$.
   Hence, solve the given second order differential equation.

2. If $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}$ and $\frac{\partial N}{\partial x}$ are continuous functions of x and y, **state** a necessary and sufficient condition for $M\,dx + N\,dy = 0$ to be an exact differential equation.

   (i) If $x^\alpha y^\beta$ is an integrating factor of the equation $x^3y^3(2y\,dx + x\,dy) = (5y\,dx + 7x\,dy)$, find the values of α and β.

   (ii) Show that the differential equation $\left(x\sqrt{x^2+y^2} - y\right)dx + \left(y\sqrt{x^2+y^2} - x\right)dy = 0$ is **exact**, and hence solve it.

3. Show that $e^{\int P(x)dx}$ is an integrating factor for the linear differential equation $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$.
   Hence, solve the following differential equations:

   (i) $\sec x\left(\frac{dy}{dx}\right) = y + \sin x$

   (ii) $(2xy + x^2 + x^4)dx - (1+x^2)dy = 0$

   (iii) $y^2dx + (3xy-1)dy = 0$.

4. (a) Let $P(t)$ be the population of a certain animal species. Assume that $P(t)$ satisfies the logistic growth equation

$$\frac{dP}{dt}=\frac{1}{2500}P(t)\big(100-P(t)\big),\quad P(0)=10,$$ where t is measured in years.

Find the population after 10 years.

(b) A particle of mass m is projected vertically upwards with velocity U from a point A. The resistance of the air is mkv^2, where v is the velocity of the particle and k is a positive constant. Write down the equation of motion when the particle is at a height x above A. Show that the particle rises to a maximum height h given by

$$h=\frac{1}{2k}\ln\left(1+\frac{k}{g}U^2\right).$$

5. (a) Find the **general solution** of each of the following differential equations:

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}-(\alpha+\beta)\frac{dy}{dx}+(\alpha\beta)y=0$,

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\alpha\frac{dy}{dx}+(\alpha^2+\beta^2)y=0$, where $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(b) Use the "$D-$operator" method to find the **particular integral** of the following differential equation and hence obtain the general solution of it:

$\left(D^2+2D+1\right)y=x\cos x$, where $D\equiv\frac{d}{dx}$.

6. (a) Show that $x=0$ is a **regular singular point** of the differential equation

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x(1-x)\frac{dy}{dx}-y=0.$$

Find two linearly independent series solutions of the form $x^s\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ for this differential equation and **hence**, find the general solution.

(b) Find the general solution of the **difference** equation $a_{n+2}-4a_{n+1}+13a_n=0$.
