ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය - 2012/2013
ශුද්ධ ගණිතය - තුන්වන මට්ටම
PUU1141/PUE3141 – ගණිතයේ පදනම

කාලය පැය දෙකයි.

දිනය : 2013.11.29 වේලාව: පෙ.ව. 9.30 - පෙ.ව. 11.30 දක්වා.

ප්‍රශ්න හතරකට පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ සාධන පැහැදිලි හා තර්කානුකූල විය යුතුය. අවලංගු හෝ අසම්පූර්ණ ප්‍රකාශ භාවිතයෙන් ලියන ලද සාධන සඳහා ලකුණු ප්‍රදානය නොකෙරේ.

1. (a) $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ ලෙස ගනිමු. පහත දැක්වෙන කවර ප්‍රකාශන සත්‍ය වේ ද?

   (i) $A=\varnothing$ (ii) $\varnothing\in A$ (iii) $\{\varnothing\}\in A$ (iv) $\{\varnothing\}\subseteq A$.

   (b) (i) $X=\{0,\{1\},\{0,\{1\}\}\}$ ලෙස ගනිමු. X කුලකයේ බලය, $\mathcal{P}(X)$ ලියා දක්වන්න.

   (ii) සියලු $k\in\mathbb{N}$ සඳහා, $A_k=\left[0,\ 2-\frac{1}{k}\right]$ සහ $B_k=\left(-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$ ලෙස ගනිමු.

   $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ සහ $\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k$ සොයන්න.

   (c) A සහ B කුලකවල සමමිතීය අන්තරය, $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ කුලකය මගින් දෙනු ලැබේ. පහත ඒවා සාධනය කරන්න:

   (i) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$ (ii) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

2. (a) S සහ T අභිශුන්‍ය නොවන කුලක දෙක අතර *කාටීසීය ගුණිතය* අර්ථ දක්වන්න.

   (i) $X=\{0,1\}$ ලෙස ගනිමු. X^3 හි අවයව ලැයිස්තුගත කරන්න.

   (ii) A,B,C ඕනෑම කුලක තුනක් සඳහා $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ බව සාධනය කරන්න.

   (b) *තුල්‍යතා සම්බන්ධය* අර්ථ දක්වන්න.

   (i) $X=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ලෙස ගනිමු. X මත R_1 සම්බන්ධයක්, ඕනෑම $x_1,x_2\in X$ සඳහා $\frac{x_1}{x_2}\in\mathbb{Q}$ නම්, $x_1R_1x_2$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇත.

   R_1, X මත තුල්‍යතා සම්බන්ධයක් වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

   (ii) S යනු $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ කාටීසියානු ඛණ්ඩාංක තලය ලෙස ගනිමු. S මත R සම්බන්ධයක්, $a+d=b+c$ නම් හා නම්ම පමණක් $(a,b)R(c,d)$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇත. R යනු S මත තුල්‍යතා සම්බන්ධයක් බව තහවුරු කර, $R_{(7,3)}$ තුල්‍යතා පන්තිය විස්තර කරන්න.

///

3. (a) $x, y, z \in \mathbb{R}$ ලෙස ගනිමු. තාත්ත්වික සංඛ්‍යා පද්ධතියේ ප්‍රත්‍යක්ෂ භාවිතයෙන්,

(i) $x+y=y+z$ නම්, එවිට $x=z$,

(ii) $(-1)\cdot x=-x$,

බව සාධනය කරන්න.

(b) (i) $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\rightarrow\mathbb{R}$ ශ්‍රිතයක් $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ සඳහා $f(x)=\dfrac{2+x}{2-x}$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇත.

f යන්න, ඒක-ඒක බව පෙන්වන්න.

$f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\rightarrow\mathbb{R}$ යන්න මතට වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(ii) $g(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ මගින් දෙනු ලබන $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ ශ්‍රිතයක් සලකන්න. g හි පරාසය සොයන්න.

4. (a) $r^2=3$ වන සේ r නම් පරිමේය සංඛ්‍යාවක් නොපවතින බව සාධනය කරන්න.

එනයින්, $\sqrt{2+3^{\frac{1}{4}}}$ යනු අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් බව පෙන්වන්න.

(b) $\sqrt{2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}}$ යන්න වීජීය සංඛ්‍යාවක් වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(c) $\mathbb{R}\setminus\{-1,-2,-3\}$ වසම තුළ $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}>\dfrac{3}{x+2}$ අසමානතාව විසඳන්න.

5. (a) A යනු හිස් නොවන, $\mathbb{R}$ හි ඉහලින් සපර්යන්ත උපකුලකයක් ලෙස සහ $2A+3=\{2a+3:a\in A\}$ ලෙස ගනිමු.

$\sup(2A+3)=2\sup A+3$ බව සාධනය කරන්න.

(b) පහත දැක්වෙන එක් එක් කුලකවල අඩුතම උඩත් පර්යන්තය (supremum) සහ වැඩිතම යටත් පර්යන්තය (infimum) සොයන්න.

(i) $S_1=\{x:x\in\mathbb{Z},|x-1|<3\}$

(ii) $S_2=\left\{2+\dfrac{(-1)^n}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$

(iii) $S_3=\{r:r\in\mathbb{Q}\mid r>1$ සහ $r^2<2\}$

(iv) $S_4=\{x:x\in\mathbb{R}\mid x^2<3\}$.

6. (a) අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන් පහත සඳහන් ඒවා සාධනය කරන්න.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}=2.$

(ii) $\left(3+2(-1)^n\right)$ අනුක්‍රමය අපසාරී වේ.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා, එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞானமாணி/ கல்விமாணிப்பட்டப் பாடநெறி
இறுதிப் பரீட்சை – 2012/2013
தூய கணிதம் – மட்டம் 03
PUU1141/ PUE3141 – கணிதத்தின் அடிப்படை

காலம்:- இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

நாள் :- 29-11-2013 நேரம் :- மு.ப 9.30 – மு.ப 11.30

நான்கு வினாக்களுக்கு விடையளிக்குக. உங்களது விடைகள் தெளிவானதாகவும் தர்க்கரீதியானதாகவும் இருத்தல் வேண்டும். முழுமையற்ற, அர்த்தமற்ற கூற்றுக்களைப் பாவித்து எழுதப்படும் நிறுவல்களுக்கு புள்ளிகள் வழங்கப்படமாட்டாது.

1. (a) $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ என்க. பின்வருவனவற்றில் உண்மையான கூற்றுக்கள் எவை?

   (i) $A=\varnothing$ (ii) $\varnothing\in A$ (iii) $\{\varnothing\}\in A$ (iv) $\{\varnothing\}\subseteq A$.

   (b) (i) $X=\{0,\{1\},\{0,\{1\}\}\}$ என்க. X இன் வலுத் தொடை $\mathcal{P}(X)$ ஐ எழுதுக.

   (ii) ஒவ்வொரு $k\in\mathbb{N}$ களுக்கும் $A_k=\left[0,\ 2-\frac{1}{k}\right]$ மற்றும் $B_k=\left(-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$ என்க.

   $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ மற்றும் $\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k$ என்பவற்றைக் காண்க.

   (b) சமச்சீர் வித்தியாசம் $A\Delta B$ ஆனது $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ என வரையறுக்கப்படுகின்றது.
   பின்வருவனவற்றை நிறுவுக:—

   (i) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$ (ii) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

2. (a) வெற்றுத் தொடைகளல்லாத S மற்றும் T என்பவற்றின் தெக்காட்டின் பெருக்கத்தை வரையறுக்க.

   (i) $X=\{0,1\}$ என்க. X^3 இன் மூலகங்களை பட்டியல் படுத்துக.

   (ii) A, B மற்றும் C என்னும் யாதாயினும் மூன்று தொடைகளுக்கு $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ ஆகும் என நிறுவுக.

   (b) சமவன்மைத் தொடர்பொன்றை வரையறுக்க.

   (i) $X=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ என்க. $\frac{x_1}{x_2}\in\mathbb{Q}$ எனின் ஒவ்வொரு $x_1,x_2\in X$ களுக்கும் தொடர்பு R_1 ஆனது X இல் $x_1R_2x_2$ என வரையறுக்கப்படுகின்றது.
   R_1 ஒரு சமவன்மைத் தொடர்பா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

   (ii) S என்பது $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ இல் உள்ள தெக்காட்டி ஆள்கூற்றுத் தளம் என்க மற்றும் தொடர்பு R ஆனது S இல் $(a,b)R(c,d)$ என்றால் என்றால் மட்டும் $a+d=b+c$ என வரையறுக்கப்படுகின்றது என்க.
   R ஒரு சமவன்மைத் தொடர்பு என்பதை வாய்ப்புப் பார்த்து சமவன்மை வகுப்பு $R_{(7,3)}$ ஐ விபரிக்க.

113

3. (a) $x, y, z \in \mathbb{R}$ என்க. மெய்யெண் தொகுதியின் வெளிப்படை உண்மைகளைப் பாவித்து,

(i) $x + y = y + z$, எனின் $x = z$ ஆகும் எனவும் ;

(ii) $(-1)\cdot x = -x$. எனவும் நிறுவுக.

(b) (i) $f : \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}$ ஆனது $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ இற்கு $f(x) = \dfrac{2+x}{2-x}$ என வரையறுக்கப்படுகின்றது.

f ஆனது ஒன்று- ஒன்று எனக் காட்டுக.

$f : \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}$ இன் மேலா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(ii) $g(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ என தரப்பட்டுள்ள சார்பு $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ஐக் கருதுக. g இன் வீச்சைக் காண்க.

4. (a) $r^2 = 3$ என ஆகுமாறு ஒரு விகிதமுறும் எண் r இல்லை என நிறுவுக.

இதிலிருந்து $\sqrt{2+3^{\frac{1}{4}}}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் எனக் காட்டுக.

(b) $\sqrt{2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}}$ ஒரு அட்சரகணித எண்ணா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(c) ஆட்சி $\mathbb{R}\setminus\{-1,-2,-3\}$ இல் $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3} > \dfrac{3}{x+2}$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்க்க.

5. (a) A என்பது $\mathbb{R}$ இன் சூனியமற்ற மேல் வரைப்புற்ற ஒரு உபதொடை என்க மற்றும் $2A+3 = \{2a+3 : a \in A\}$ என்க. $\sup(2A+3) = 2\sup A + 3$ எனக் காட்டுக.

(b) பின்வரும் தொடைகள் ஒவ்வொன்றினதும் சுப்ரிமம் **(supremum)** மற்றும் இன்பிமம் **(infimum)** என்பவற்றைக் காண்க:

(i) $S_1 = \{x : x \in \mathbb{Z}, |x-1| < 3\}$

(ii) $S_2 = \left\{2 + \dfrac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

(iii) $S_3 = \{r : r \in \mathbb{Q} \mid r > 1 \wedge x^2 < 2\}$

(iv) $S_4 = \{x : x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3\}$.

6. (a) வரைவிலக்கணத்தைப் பாவித்து, பின்வரும் ஒவ்வொன்றையும் நிறுவுக:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 2$.

(ii) $\left(3+2(-1)^n\right)$ என்னும் தொடரி ஒடுங்காது.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ என்னும் தொடர் ஒருங்கும் எனக் காட்டி அதன் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

114

The Open University of Sri Lanka
B.Sc/B.Ed. Degree Programme
Final Examination - 2012/2013
Pure Mathematics - Level 03
PUU1141/PUE3141 – Foundation of Mathematics

Duration:-Two hours

Date:-29.11.2013 **Time:-9:30a.m.-11:30a.m**

Answer **FOUR** questions. Your proofs must be clear and logical. Credit is not awarded for proofs written using invalid or incomplete statements.

1. (a) Let $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$. Which of the following statements are true?

   (i) $A=\varnothing$ (ii) $\varnothing\in A$ (iii) $\{\varnothing\}\in A$ (iv) $\{\varnothing\}\subseteq A$.

   (b) (i) Let $X=\{0,\{1\},\{0,\{1\}\}\}$. Write down the power set $\mathcal{P}(X)$ of X.

   (ii) For each $k\in\mathbb{N}$, let $A_k=\left[0,\ 2-\frac{1}{k}\right]$ and $B_k=\left(-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$.

   Find $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ and $\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k$.

   (b) The *symmetric difference* of the sets A and B is the set $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.
   Prove the following:

   (i) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$ (ii) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

2. (a) Define the *Cartesian product* of two non empty sets S and T.

   (i) Let $X=\{0,1\}$. List the elements of X^3.

   (ii) For any sets A,B and C, prove that $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

   (b) Define an *equivalence relation.*

   (i) Let $X=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Define the relation R_1 on X by $x_1R_1x_2$ if $\frac{x_1}{x_2}\in\mathbb{Q}$ for each $x_1,x_2\in X$. Is R_1 an equivalence relation on X? **Justify your answer.**

   (ii) Let S be the Cartesian coordinate plane $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ and a relation R on S defined by $(a,b)\,R\,(c,d)$ if and only if $a+d=b+c$.

   Verify that R is an equivalence relation on S and describe the equivalence class $R_{(7,3)}$.

3. (a) Let $x, y, z \in \mathbb{R}$. Using the **axioms** of the real number system, prove that

(i) If $x + y = y + z$, then $x = z$;

(ii) $(-1) \cdot x = -x$.

(b) (i) Define $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ by $f(x) = \dfrac{2+x}{2-x}$ for $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Show that f is one - to - one.

Is $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ onto? Justify your answer.

(ii) Consider the function $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ given by $g(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. Find the range of g.

4. (a) Prove that there does not exists a *rational* number r such that $r^2 = 3$.

Hence, show that $\sqrt{2 + 3^{\frac{1}{4}}}$ is an irrational number.

(b) Is $\sqrt{2^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}}$ an *algebraic* number? **Justify your answer.**

(c) Solve the inequality $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x+3} > \dfrac{3}{x+2}$ in the domain $\mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3\}$.

5. (a) Let A be a non-empty subset of $\mathbb{R}$ that is **bounded above** and let

$2A + 3 = \{2a + 3 : a \in A\}$.

Prove that $\sup(2A + 3) = 2 \sup A + 3$.

(b) Find the **supremum** and the **infimum** of each of the following sets.

(i) $S_1 = \{x : x \in \mathbb{Z}, |x - 1| < 3\}$

(ii) $S_2 = \left\{2 + \dfrac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

(iii) $S_3 = \{r : r \in \mathbb{Q} \mid r > 1 \text{ and } r^2 < 2\}$

(iv) $S_4 = \{x : x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3\}$.

6. (a) **Use the definition** to prove each of the following:

(i) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3 + 2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 2$.

(ii) The sequence $\left(3 + 2(-1)^n\right)$ is **divergent**.

(b) Show that the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ **converges** and find its sum.