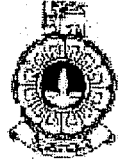


ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
ශුද්ධ ගණිතය - තුන්වන මට්ටම
අවසාන පරීක්ෂණය - 2012/2013
PMU 1192/PME 3192 - විශ්ලේෂණය



කාලය: පැය දෙකයි.

දිනය :-2013.12.17

වේලාව:- ප.ව. 1.30 – ප.ව.3.30 දක්වා

ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (a) පහත දී ඇති එක් එක් සීමා අගයන්න.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin x^2}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{\log x}, \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 4x - \cos 2x}{\cos 3x - \cos x} \right).$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 3+x-x^2 & x \in (-\infty, 1), \\ x^2+ax+b & x \in [1, \infty), \end{cases} \text{ මගින් අර්ථ දක්වා ඇති } f \text{ ශ්‍රිතය } x=1 \text{ හිදී}$$

අවකලය බව දී ඇත.

$a = -3$ සහ $b = 5$ බව පෙන්වන්න.

2. (a) $f(x) = |x-2| + |x| + |x+2|$ මගින් අර්ථ දක්වා ඇති f ශ්‍රිතය $x = -2, 0, 2$ හිදී
අවකලය නොවන බව පෙන්වන්න.

$$(b) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases} \text{ ලෙස ගනිමු.}$$

x හි සෑම අගයක් සඳහාම f අවකලය නමුත් $x=0$ හිදී ව්‍යුත්පන්නය සන්තතික
නොවන බව පෙන්වන්න.

3. (a) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = 2x|x| + 1$ ලෙස ගනිමු. ප්‍රමුඛධර්මය මගින් $f'(x)$ සොයන්න.

$$(b) f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases} \text{ ලෙස ගනිමු.}$$

සියලු තාත්වික x සඳහා f සන්තතික බව පෙන්වන්න.

0 හිදී f අවකලය වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

4. (a) $y = \left[\log \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right) \right]^2 + k \log (x + \sqrt{x^2 - a^2})$ නම්, එවිට

$$(x^2 - a^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 2a$$
 බව සාධනය කරන්න. මෙහි a සහ k නියත වේ.

(b) f යනු සියලු $x, y \in \mathbb{R}$ සඳහා $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ තෘප්ත වන පරිදි ශ්‍රිතයක්

ලෙස ගනිමු. $f''(x)$ සොයන්න.

5. (a) පහත දී ඇති එක් එක් අනුකල අගයන්න.

$$(i) \int_0^{\pi/6} \sin x \sec^2 x dx, \quad (ii) \int_0^{\pi/4} \tan^3 x dx.$$

(b) $I_n = \int x^n \sin ax dx$ නම්, $a^2 I_n = -ax^n \cos ax + nx^{n-1} \sin ax - n(n-1)I_{n-2}$ බව

පෙන්වන්න. එනමින් $\int_0^{\pi/4} x^4 \sin 2x dx$ අගයන්න.

6. (a) $(1+x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^r හි සංගුණකය C_r නම්, පහත එක් එක් සර්වසාමය සාධනය කරන්න. මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි.

$$(i) C_0 + C_2 + C_4 + \dots = C_1 + C_3 + C_5 + \dots = 2^{n-1},$$

$$(ii) C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_n^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

$$(iii) C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \dots + (n+1)C_n = (n+2)2^{n-1}.$$

(b) $\frac{2x}{(1-x)(1+x^2)}$ හාගය $\frac{A}{1-x} + \frac{B+Cx}{1+x^2}$ ට සමාන වන පරිදි A, B සහ C සංඛ්‍යා

සොයන්න. එනමින් x හි ආරෝහණ බලවලින් x^5 දක්වා ඉහත හාගයෙහි ප්‍රසාරණය ලබාගන්න. x හි කවර අගය පරාසයක් සඳහා ඉහත ප්‍රසාරණය වලංගු වේද?

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞானமாணி/ கல்விமாணிப்பட்டப் பாடநெறி
இறுதிப் பரீட்சை - 2012/2013
தூய கணிதம் - மட்டம் 03
PMU1192/ PME3192 - பகுப்பு



காலம் :- இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

நாள் :- 17.12.2013

நேரம் :- பி.ப 01.30 - பி.ப 03.30

நாளுக்கு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்க.

1. (a) பின்வரும் ஒவ்வொரு எல்லைகளையும் துணிக:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin x^2}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{\log x}, \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 4x - \cos 2x}{\cos 3x - \cos x} \right).$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 3+x-x^2 & \text{if } x \in (-\infty, 1), \\ x^2+ax+b & \text{if } x \in [1, \infty), \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு f ஆனது $x=1$ இல் தொடர்சியானது என தரப்பட்டுள்ளது.

$a = -3$ மற்றும் $b = 5$ எனக் காட்டுக.

2. (a) $f(x) = |x-2| + |x| + |x+2|$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு f ஆனது $x = -2, 0, 2$ என்பவற்றில் வகையிடதக்கதல்ல எனக் காட்டுக.

$$(b) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases} \text{ என்க.}$$

f ஆனது x இன் எல்லா பெறுமானங்களுக்கும் வகையிடதக்கது ஆனால் வகையீடானது $x=0$ இல் தொடர்சியானதல்ல எனக் காட்டுக.

3. (a) $x \in \mathbb{R}$ இற்கு $f(x) = 2x|x| + 1$ என்க. முதலாவது தத்துவங்களிலிருந்து $f'(x)$ ஐக் காண்க.

$$(b) f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases} \text{ என்க.}$$

x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் f ஆனது தொடர்சியானது எனக் காட்டுக.

f ஆனது 0 இல் வகையிடதக்கதா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

4. (a) $y = \left[\log \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right) \right]^2 + k \log(x + \sqrt{x^2 - a^2})$ எனின் $(x^2 - a^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 2a$ என நிறுவுக, இங்கு a மற்றும் k என்பன மாறிலிகளாகும்.

- (b) f ஆனது எல்லா $x, y \in \mathbb{R}$ களுக்கும் $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ ஐ திருப்திப் படுத்தும் ஒரு சார்பு என்க. $f''(x)$ ஐக் காண்க.

5. (a) பின்வரும் ஒவ்வொரு தொகையீடுகளையும் துணிக:

$$(i) \int_0^{\pi/6} \sin x \sec^2 x dx, \quad (ii) \int_0^{\pi/4} \tan^3 x dx.$$

- (b) $I_n = \int x^n \sin ax dx$ எனின் $a^2 I_n = -ax^n \cos ax + nx^{n-1} \sin ax - n(n-1)I_{n-2}$ எனக் காட்டுக.

$$\text{இதிலிருந்து } \int_0^{\pi/4} x^4 \sin 2x dx \text{ ஐத் துணிக.}$$

6. (a) C_r ஆனது $(1+x)^n$ என்னும் ஈருறுப்பு விரிவில் x^r இன் குணகமெனின் பின்வரும் ஒவ்வொரு சர்வசமன்பாடுகளையும் நிறுவுக, இங்கு n ஆனது ஒரு நேர் நிறையெண்ணாகும்:

$$(i) C_0 + C_2 + C_4 + \dots = C_1 + C_3 + C_5 + \dots = 2^{n-1},$$

$$(ii) C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_n^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

$$(iii) C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \dots + (n+1)C_n = (n+2)2^{n-1}.$$

- (b) $\frac{2x}{(1-x)(1+x^2)}$ என்னும் பின்னமானது $\frac{A}{1-x} + \frac{B+Cx}{1+x^2}$ இற்கு சமனாகுமாறான எண்கள் A, B மற்றும் C என்பவற்றைக் காண்க.

இதிலிருந்து பின்னத்தின் x இல் அதிகரிக்கும் வலுக்களில் x^5 வரை விரிவைப் பெறுக.

இவ்விரிவு வலிதானதாக இருப்பதற்கு x ஆனது எப்பெறுமானங்களுக்கிடையில் இருத்தல் வேண்டும்?

The Open University of Sri Lanka
 B. Sc/ B. Ed Degree Programme
 Final Examination - 2012/2013
 Pure Mathematics-Level 03
 PMU1192/ PME3192- Analysis



Duration:-Two hours

Date:-17.12.2013

Time:- 1.30p.m. - 3.30p.m.

Answer **FOUR** questions only.

1. (a) Evaluate each of the following limits:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin x^2}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{\log x}, \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 4x - \cos 2x}{\cos 3x - \cos x} \right).$$

(b) The function f defined by $f(x) = \begin{cases} 3+x-x^2 & \text{if } x \in (-\infty, 1), \\ x^2+ax+b & \text{if } x \in [1, \infty), \end{cases}$

is given to be differentiable at $x=1$.

Show that $a = -3$ and $b = 5$.

2. (a) Show that the function f defined by $f(x) = |x-2| + |x| + |x+2|$ is not differentiable at $x = -2, 0, 2$.

(b) Let $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}$

Show that f is differentiable for every value of x but the derivative is not continuous at $x = 0$.

3. (a) Let $f(x) = 2x|x| + 1$ for $x \in \mathbb{R}$. From the first principles, find $f'(x)$.

(b) Let $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$

Show that f is continuous for all real x .

Is f differentiable at 0? Justify your answer.

4. (a) Prove that if $y = \left[\log \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right) \right]^2 + k \log(x + \sqrt{x^2 - a^2})$, then

$$(x^2 - a^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 2a, \text{ where } a \text{ and } k \text{ are constants.}$$

(b) Let f be a function satisfying $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ for all $x, y \in \mathbb{R}$.

Find $f''(x)$.

5. (a) Evaluate each of the following integrals:

$$(i) \int_0^{\pi/6} \sin x \sec^2 x dx, \quad (ii) \int_0^{\pi/4} \tan^3 x dx.$$

(b) If $I_n = \int x^n \sin ax dx$, show that $a^2 I_n = -ax^n \cos ax + nx^{n-1} \sin ax - n(n-1)I_{n-2}$.

$$\text{Hence evaluate } \int_0^{\pi/4} x^4 \sin 2x dx.$$

6. (a) If C_r is the coefficient of x^r in the binomial expansion of $(1+x)^n$, where n is a positive integer, prove each of the following identities:

$$(i) C_0 + C_2 + C_4 + \dots = C_1 + C_3 + C_5 + \dots = 2^{n-1},$$

$$(ii) C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_n^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

$$(iii) C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \dots + (n+1)C_n = (n+2)2^{n-1}.$$

(b) Find the numbers A , B and C such that the fraction $\frac{2x}{(1-x)(1+x^2)}$ is equal to $\frac{A}{1-x} + \frac{B+Cx}{1+x^2}$.

Hence obtain the expansion of the fraction in ascending powers of x as far as x^5 .

Between what values must x lie in order that this expansion is valid?