

ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය - 2013/2014
ව්‍යවහාරික ගණිතය - කුන්වන මට්ටම
APU1140/APE3140 - දෛශික විජය



කාලය පැය දෙකයි.

දිනය: 2014. 06. 10

වේලාව: පෙ.ව. 9:30 - පෙ.ව. 11:30 දක්වා.

ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (a) n ප්‍රතින්න දෛශික පද්ධතියක් සඳහා රේඛීය ස්වයන්තතාව සහ රේඛීය පරායත්තතාව අර්ථ දක්වන්න.

$f_1 = 3a + b + 2c$, $f_2 = 2a + b + c$ සහ $f_3 = 4a + b + 3c$ යන දෛශික තුන රේඛීයව ස්වයන්තද? මෙහි a , b සහ c යනු ඒකතල නොවන දෛශික තුනකි.

- (b) $\overline{AB} = a$ සහ $\overline{BC} = b$ පරිදි වන $ABCDEF$ සවිධි ඡඩප්‍රය සලකන්න. එසේනම් $\overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}$ සහ \overline{FA} දෛශිකද $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}$ සහ \overline{CE} යන දෛශික සඳහාද ප්‍රකාශණ a සහ b ඇසුරෙන් සොයන්න.

2. a සහ b දෛශික දෙකෙහි (i) $a \cdot b$ අදිශ ගුණිතය සහ (ii) $a \times b$ දෛශික ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

- (a) $a \neq 0$ ලෙස සලකන්න.

(i) $a \cdot b = a \cdot c$ නම්, $b = c$ වේද?

(ii) $a \times b = a \times c$ නම්, $b = c$ වේද?

(iii) $a \cdot b = a \cdot c$ සහ $a \times b = a \times c$ නම්, $b = c$ වේද?

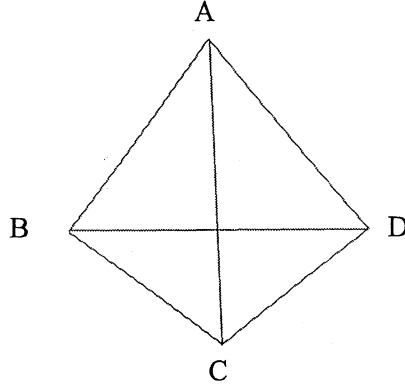
(i) , (ii) සහ (iii) කොටස් සඳහා ඔබේ පිළිතුරු සනාථ කරන්න.

- (b) $a + b$ සහ $a - b$ දෛශික දෙක එකිනෙකට ලම්බක නම්, a සහ b දෛශික දෙකෙහි විශාලත්ව සමාන බව පෙන්වන්න.

- (c) $(a - b) \times (a + b) = 0$ නම්, a සහ b දෛශික දෙක එකිනෙකට සමාන්තර වන බව පෙන්වන්න.

3. (a) ත්‍රිකෝණයක පාදකයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට මුදුන් ශීර්ෂය සම්බන්ධකරණ රේඛාව පාදකයට ලම්බක නම්, එම ත්‍රිකෝණය සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් වන බව දෙදැයික භාවිතයෙන් පෙන්වන්න.
- (b) $\underline{a}, \underline{b}$ සහ \underline{c} යනු $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{b}$ වන පරිදි වන ඒකක දෛශික තුනකි. එසේනම් \underline{a} සමඟ \underline{b} සහ \underline{c} සාදන කෝණයන්හි අගය සොයන්න. මෙහි \underline{b} සහ \underline{c} යනු එකිනෙකට අසමාන්තර දෛශික දෙකකි.
- (c) $\underline{a} \cdot [(\underline{a} - \underline{b}) \times (\underline{a} + \underline{b})] = 0$ ප්‍රකාශණය සත්‍ය බව පෙන්වන්න; මෙහි \underline{a} සහ \underline{b} යනු ඕනෑම දෛශික දෙකකි.
4. (a) $\underline{f}(t) = \ln(1-t^2)\underline{i} + \frac{e^t \sin(t-1)}{t-\frac{2}{3}}\underline{j} + \sqrt{t}\underline{k}$ යන දෛශික ශ්‍රිතයේ වසම ලියන්න. මෙහි t යනු පරාමිතියක් වන අතර $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ට සුපුරුදු අර්ථ දැක්වීම් ඇත.
- (b) \underline{f} සහ \underline{g} යනු t පරාමිතියක දෛශික ශ්‍රිත ලෙස ගනිමු.
- (i) $\frac{d}{dt}(\underline{f} \cdot \underline{g})$ සහ $\frac{d}{dt}(\underline{f} \times \underline{g})$ සඳහා සුත්‍ර ලියා දක්වන්න.
- (ii) (i) වන කොටස භාවිතයෙන් $\frac{d}{dt}\{\underline{f} \cdot (\underline{g} \times \underline{a})\}$ සඳහා සුත්‍රයක් ලබා ගන්න. මෙහි \underline{a} යනු නියත දෛශිකයකි.
- (c) $\underline{r}'(t) = t\underline{i} + e^t \underline{j} + te^t \underline{k}$ සහ $\underline{r}(0) = \underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$ වේ. එසේනම් $\underline{r}(t)$ සොයන්න; මෙහි t යනු පරාමිතියකි.
5. (a) $\underline{r}(\theta) = 2 \cos \theta \underline{i} + 2 \sin \theta \underline{j} + \theta \underline{k}$ අවකාශ වක්‍රයෙහි ඒකක ස්පර්ශකය \hat{t} , ප්‍රධාන අභිලම්බ ඒකක දෛශිකය \hat{n} සහ වක්‍රභාව \underline{K} සොයන්න. මෙහි θ යනු පරාමිතියකි.
- (b) $x + y + z = 1$ සහ $x - 2y + 3z = 1$ යන තල දෙකෙහි ජේදන රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

6.



(a) $ABCD$ චතුස්කලයක A, B, C, D ශීර්ෂ හතරෙහි පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ සහ \underline{d} වේ.

(i) B, C සහ D ලක්ෂ්‍ය තුන හරහා යන තලයට ලම්බක දෛශිකය $\underline{b}, \underline{c}$ සහ \underline{d} ඇසුරෙන් සොයන්න.

(ii) BCD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $\frac{1}{2}|\underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{d} + \underline{d} \times \underline{b}|$ වන බව පෙන්වන්න.

(iii) A ලක්ෂ්‍යයේ සිට BCD තලයට ඇති ලම්බක දුර,

$$\frac{[\underline{b} \ \underline{c} \ \underline{d}] + [\underline{c} \ \underline{a} \ \underline{d}] + [\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{d}] - [\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}]}{|\underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{d} + \underline{d} \times \underline{b}|}$$
 බව පෙන්වන්න.

[මෙහි $[\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}]$ යන්නෙන් $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ දෛශික තුනෙහි $\underline{a} \cdot \underline{b} \times \underline{c}$ අදියර ත්‍රිත්ව ගුණිතය නිරූපණය වේ.]

(iv) කොටස් (ii) සහ (iii)හි ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් $ABCD$ චතුස්කලයේ පරිමාව,

$$\frac{1}{6} |[\underline{b} \ \underline{c} \ \underline{d}] + [\underline{c} \ \underline{a} \ \underline{d}] + [\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{d}] - [\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}]|$$
 බව පෙන්වන්න.

(b) මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට $x + 2y + 2z = 9$ තලයට ඇති කෙටිම දුර සොයන්න.

The Open University of Sri Lanka
B.Sc/ B.Ed. Degree Programme
Final Examination - 2013/2014
Applied Mathematics - Level 03
APU1140/APE3140 – Vector Algebra



Duration: - Two hours

Date: 10.06.2014

Time: 09:30 - 11:30

Answer **four** questions only.

1. (a) Define linear independence and linear dependence of a system of n distinct vectors.

Let \underline{a} , \underline{b} and \underline{c} be three non – coplanar vectors. Examine whether the vectors $\underline{f}_1 = 3\underline{a} + \underline{b} + 2\underline{c}$, $\underline{f}_2 = 2\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ and $\underline{f}_3 = 4\underline{a} + \underline{b} + 3\underline{c}$ are linearly independent or are linearly dependent.

- (b) $ABCDEF$ is a regular hexagon. Let $\overline{AB} = \underline{a}$ and $\overline{BC} = \underline{b}$. Find the vectors $\overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}$ and \overline{FA} . Also express the vectors $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}$ and \overline{CE} in terms of \underline{a} and \underline{b} .

2. Define (i) the scalar product $\underline{a} \cdot \underline{b}$ and (ii) the vector product $\underline{a} \times \underline{b}$ of two given vectors \underline{a} and \underline{b} .

- (a) Suppose $\underline{a} \neq \underline{0}$.

(i) If $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{c}$, does it follow that $\underline{b} = \underline{c}$? Justify your answer.

(ii) If $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{a} \times \underline{c}$, does it follow that $\underline{b} = \underline{c}$? Justify your answer.

(iii) If $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{c}$ and $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{a} \times \underline{c}$, does it follow that $\underline{b} = \underline{c}$? Justify your answer.

- (b) Show that if the vectors $\underline{a} + \underline{b}$ and $\underline{a} - \underline{b}$ are orthogonal, then \underline{a} and \underline{b} must have the same magnitude.

- (c) Show that if $(\underline{a} - \underline{b}) \times (\underline{a} + \underline{b}) = \underline{0}$, then the vectors \underline{a} and \underline{b} must be parallel to each other.

3. (a) Prove using vector methods that if the line joining the midpoint of the base of a triangle to the opposite vertex is perpendicular to the base, then the triangle is isosceles.

(b) $\underline{a}, \underline{b}$ and \underline{c} are three unit vectors such that $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{b}$. Find the angles which \underline{a} makes with \underline{b} and \underline{c} . Here \underline{b} and \underline{c} are non parallel.

(c) For any 2 vectors \underline{a} and \underline{b} prove that, $\underline{a} \cdot [(\underline{a} - \underline{b}) \times (\underline{a} + \underline{b})] = 0$.

4. (a) Find the domain of the vector valued function

$$\underline{f}(t) = \ln(1-t^2)\underline{i} + \frac{e^t \sin(t-1)}{t-\frac{2}{3}}\underline{j} + \sqrt{t}\underline{k},$$

where t is a parameter and $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ have the usual meanings.

(b) Let \underline{f} and \underline{g} be vector functions of a scalar t .

(i) Write down the formulae for $\frac{d}{dt}(\underline{f} \cdot \underline{g})$ and $\frac{d}{dt}(\underline{f} \times \underline{g})$.

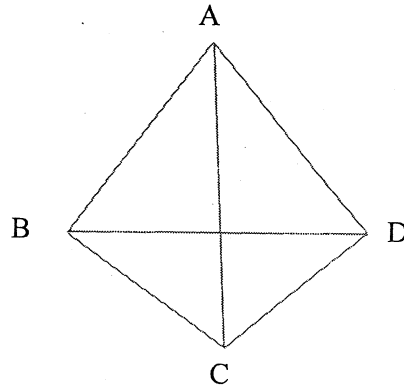
(ii) Using part (i) find a formula for $\frac{d}{dt}\{\underline{f} \cdot (\underline{g} \times \underline{a})\}$, where \underline{a} is a constant vector.

(c) Find $\underline{r}(t)$ if $\underline{r}'(t) = t\underline{i} + e^t \underline{j} + te^t \underline{k}$ and $\underline{r}(0) = \underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$, where t is a scalar.

5. (a) Find the unit tangent vector \hat{t} , unit principal normal \hat{n} and curvature κ of the space curve $\underline{r}(\theta) = 2\cos\theta\underline{i} + 2\sin\theta\underline{j} + \theta\underline{k}$.

(b) Find the line of intersection l of the two planes $x+y+z=1$ and $x-2y+3z=1$.

6.



(a) Consider a tetrahedron $ABCD$ where the vertices A, B, C, D have position vectors $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ and \underline{d} respectively.

(i) Find a vector perpendicular to the plane through the points B, C and D in terms of $\underline{b}, \underline{c}$ and \underline{d} .

(ii) Show that the area of the triangle BCD is $\frac{1}{2}|\underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{d} + \underline{d} \times \underline{b}|$.

(iii) Show that the perpendicular distance from the point A to the plane BCD is

$$\frac{[\underline{b} \ \underline{c} \ \underline{d}] + [\underline{c} \ \underline{a} \ \underline{d}] + [\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{d}] - [\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}]}{|\underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{d} + \underline{d} \times \underline{b}|}$$

[Here $[\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}]$ denotes the scalar triple product $\underline{a} \cdot \underline{b} \times \underline{c}$ of three vectors $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$.]

(iv) Using the results from parts (ii) and (iii) show that the volume of

tetrahedron $ABCD$ is $\frac{1}{6} | [\underline{b} \ \underline{c} \ \underline{d}] + [\underline{c} \ \underline{a} \ \underline{d}] + [\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{d}] - [\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}] |$.

(b) Find the shortest distance from the origin to the plane $x + 2y + 2z = 9$.

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
 விஞ்ஞானமணி/ கல்விமணி பட்டப் பாடநெறி
 இறுதிப் பரீட்சை 2013/2014
 பிரயோக கணிதம் மட்டம் - 03
 APU1140/ APE3140- காவி அட்சரகணிதம்



காலம்: இரண்டு மணித்தியாலங்கள்.

திகதி: 10.06.2014

நேரம்: 09:30 - 11:30

நான்கு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

1. (a) n வேறுபட்ட காவிகள் உள்ள தொகுதியொன்றின் ஏகபரிமானம் சார்ந்த மற்றும் ஏகபரிமானம் சாராதவற்றை வரையறுக்க.

a , b மற்றும் c என்பன ஒரு தளத்திலில்லாத மூன்று காவிகளாகும். காவிகள் $f_1 = 3a + b + 2c$, $f_2 = 2a + b + c$ மற்றும் $f_3 = 4a + b + 3c$ ஆனவை ஏகபரிமானமாக சார்ந்ததா அல்லது ஏகபரிமானமாக சாராதவையா என மதிப்பீடு செய்க.

(b) $ABCDEF$ ஆனது ஒரு சீரான அறுகோணியாகும். $\overline{AB} = a$ மற்றும் $\overline{BC} = b$ என்க. காவிகள் $\overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}$ மற்றும் \overline{FA} என்பவற்றை காண்க. மேலும் காவிகள் $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}$ மற்றும் \overline{CE} என்பனவற்றை a மற்றும் b என்னும் உறுப்புக்களில் தருக.

2. தரப்பட்ட இரண்டு காவிகள் a மற்றும் b என்பனவற்றின், (i) எண்ணிப் பெருக்கம் $a \cdot b$ மற்றும் (ii) காவி பெருக்கம் $a \times b$ என்பவற்றை வரையறுக்க.

(a) $a \neq 0$ என தரப்பட்டின்.

(i) $a \cdot b = a \cdot c$ எனின், அது $b = c$ பின்பற்ற வேண்டுமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

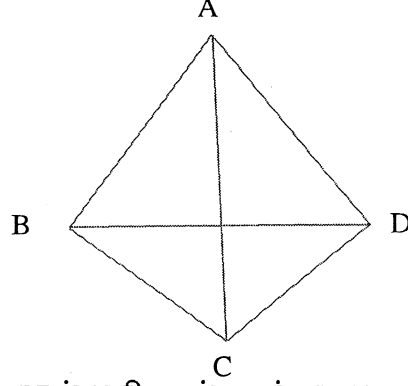
(ii) $a \times b = a \times c$ எனின், அது $b = c$ பின்பற்ற வேண்டுமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(iii) $a \cdot b = a \cdot c$ மற்றும் $a \times b = a \times c$ எனின், அது $b = c$ பின்பற்ற வேண்டுமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

- (b) காவிகள் $\underline{a} + \underline{b}$ மற்றும் $\underline{a} - \underline{b}$ ஆனது நிமிர்கோண-காவிகள் எனின், \underline{a} மற்றும் \underline{b} என்பன கட்டாயமாக சமமான பருமன்களைக் கொண்டிருக்கும் எனக் காட்டுக.
- (c) $(\underline{a} - \underline{b}) \times (\underline{a} + \underline{b}) = \underline{0}$ எனின், காவிகள் \underline{a} மற்றும் \underline{b} என்பன ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமாக இருக்க வேண்டும் எனக் காட்டுக.
3. (a) ஒரு முக்கோணத்தின் எதிர் உச்சியில் இருந்து அதன் அடித்தளத்தின் நடுப்புள்ளியை இணைக்கும் கோடானது அதன் அடித்தளத்திற்கு செங்குத்தாக இருந்தால், காவி வழிமுறைகளை பயன்படுத்தி முக்கோணியானது இரு சமபக்க முக்கோணி எனக் காட்டுக.
- (b) $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{b}$ என ஆகுமாறு $\underline{a}, \underline{b}$ மற்றும் \underline{c} என்பன மூன்று அலகுக்காவிகள் ஆகும். \underline{a} ஆனது \underline{b} மற்றும் \underline{c} என்பனவற்றுடன் அமைக்கும் கோணங்களைக் காண்க. இங்கு \underline{b} மற்றும் \underline{c} என்பன சாமாந்தரமற்றவைகளாகும்.
- (c) யாதாயினும் இரண்டு காவிகள் \underline{a} மற்றும் \underline{b} என்பனவற்றிற்கு, $\underline{a} \cdot [(\underline{a} - \underline{b}) \times (\underline{a} + \underline{b})] = 0$ என நிறுவுக.
4. (a) $\underline{f}(t) = \ln(1-t^2)\underline{i} + \frac{e^t \sin(t-1)}{t-\frac{2}{3}}\underline{j} + \sqrt{t}\underline{k}$, என்னும் காவிப் பெறுமானச் சார்பின் ஆட்சியினைக் காண்க.
- இங்கு t ஒரு பரமானமாகும் அத்துடன் $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ஆனது வழக்கமான பொருள்களைக் கொண்டுள்ளன.
- (b) இங்கு \underline{f} மற்றும் \underline{g} என்பன t எனும் ஒரு எண்ணியின் காவிச் சார்புகளாகும்.
- (i) $\frac{d}{dt}(\underline{f} \cdot \underline{g})$ மற்றும் $\frac{d}{dt}(\underline{f} \times \underline{g})$ என்பனவற்றின் சூத்திரங்களை எழுதுக.
- (ii) பகுதி (i) பயன்படுத்தி $\frac{d}{dt}\{\underline{f} \cdot (\underline{g} \times \underline{a})\}$ இற்கு சூத்திரம் ஒன்றைக் காண்க. இங்கு \underline{a} என்பது ஒரு ஒருமைக் காவியாகும்.
- (c) $\underline{r}'(t) = t\underline{i} + e^t \underline{j} + te^t \underline{k}$ மற்றும் $\underline{r}(0) = \underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$ ஆகவும் இருந்தால் $\underline{r}(t)$ இனைக் காண்க. இங்கு t ஒரு எண்ணியாகும்.
5. (a) வெளி வளைவு $\underline{r}(\theta) = 2 \cos \theta \underline{i} + 2 \sin \theta \underline{j} + \theta \underline{k}$ இன், அலகுத் தொடலிக் காவி \hat{t} , அலகுத் தலைமைச் செவ்வன் \hat{n} மற்றும் வளைவு κ என்பனவற்றைக் காண்க.

(b) இரண்டு தளங்கள் $x+y+z=1$ மற்றும் $x-2y+3z=1$ ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் கோடு l ஐக் காண்க.

6.



(a) $ABCD$ என்னும் நான்முகி ஒன்றைக் கருதுக, இங்கு உச்சிகள் A, B, C, D என்பனவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே a, b, c மற்றும் d ஆகும்.

(i) B, C மற்றும் D என்னும் புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் தளத்துக்குச் செங்குத்தான காவி ஒன்றை b, c மற்றும் d என்னும் உறுப்புகளில் காண்க.

(ii) BCD எனும் முக்கோணியின் பரப்பளவானது $\frac{1}{2}|b \times c + c \times d + d \times b|$ எனக் காட்டுக.

(iii) புள்ளி A இலிருந்து தளம் BCD ற்கான செங்குத்துத் தூரம்

$$\frac{[b \ c \ d] + [c \ a \ d] + [a \ b \ d] - [a \ b \ c]}{|b \times c + c \times d + d \times b|}$$
 எனக் காட்டுக.

[இங்கு $[a \ b \ c]$ ஆனது மூன்றுகாவிகள் a, b, c என்பனவற்றின் எண்ணி மும்மைப் பெருக்கம் $a \cdot b \times c$ இனைக் குறிக்கின்றது.]

(iv) பகுதிகள் (ii) மற்றும் (iii) என்பனவற்றின் முடிவுகளைப் பயன்படுத்தி

நான்முகி $ABCD$ இன் கனவளவு $\frac{1}{6} |[b \ c \ d] + [c \ a \ d] + [a \ b \ d] - [a \ b \ c]|$ எனக் காட்டுக.

(b) உற்பத்தியிலிருந்து தளம் $x+2y+2z=9$ இற் கிடையிலான மிகக்குறுகிய தூரத்தைக் காண்க.