ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය - 2014/2015
ව්‍යවහාරික ගණිතය - තුන්වන මට්ටම
APU1142/APE3142 – අවකල සමීකරණ

කාලය පැය දෙකයි.

දිනය : **2015.10.16** වේලාව - පෙ.ව. **9.30** - පෙ.ව. **11.30** දක්වා.

ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (a) පහත ආරම්භක අගය සහිත අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 e^x + y}{x}, y(1) = 0.$$

[ඉඟිය: $y = vx$ ආදේශය භාවිතා කරන්න.]

(b) පහත අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3 \cos x, x \neq 0.$$

2. සුදුසු ආදේශයක් භාවිතාකර, මෙම අවකල සමීකරනයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{x - y - 7}.$$

3. (a) $2(x^2 y^2 + y + x^4)dx + x(1 + x^2 y)dy = 0$ අවකල සමීකරණය සපිරි නොවනබව පෙන්වන්න.

(b) සුදුසු අනුකල සාධකයක් යොදගනිමින් (a) කොටසෙහි ඇති අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

4. (a) මෙම අවකල සමීකරනයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 5y = 5x^2 + 4xe^x.$$

(b) $u_1 = -2$ සහ $u_2 = 12$ නම්, $u_n + 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0, n \geq 3$ වන අන්තර සමීකරණය විසඳන්න.

එනයින් u_5 හි අගය සොයන්න.

(සැ.යු. වෙනත් අයුරකින් ලබාගන්නා විසඳුම් සඳහා ලකුණු නොලැබේ.)

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$ අවකල සමීකරනයේ x හි බල ඇති බල ශ්‍රේණි (power series) විසඳුම

$$y(x) = a_0(1-2x^2) + a_1\left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k(-3)(-1)(1)(3)\cdots(2k-3)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)$$

ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි a_0, a_1 අභිමත නියත වන අතර $k \in \mathrm{N}$ වේ.

6. $N = N(t)$ යනු t කාලයේදී එක්තරා සත්ව ගහණයක විශාලත්වය සහ r යනු එහි වර්ධන වේගය ලෙස ගනිමු. සත්ව ගහණයේ වර්ධනය සීමා සහිත සම්පත් හේතුවෙන් නිරෝධනයවන සිදුවීමක් *Verhulst* සමීකරණය වන $\dfrac{dN}{dt} = rN\left(1 - \dfrac{N}{K}\right)$ මඟින් ආකෘතිගතලකල හැක. මෙහි K යනු අදාළ පරිසරයේ ඉසිලුම් ධාරිතාව (carrying capacity) වේ. එය නියතයකි.

(a) ඉහත සත්ව ගහණය සඳහා $\tau = rt$ සහ $x = \dfrac{N}{K}$ භාවිතා කරමින් $\dfrac{dx}{d\tau} = x(1-x)$ බව පෙන්වන්න.

(b) ඉහත අවකල සමීකරණය විසඳීමෙන්, $x(\tau) = \dfrac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{-\tau}}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $x(0) = x_0 > 0$ වේ.

(c) $\lim_{\tau \to \infty}(x(\tau))$ සොයා, එනයින් K දක්වා පමණක් සත්ව ගහණය වර්ධනය වනබව පෙන්වන්න.

The Open University of Sri Lanka
B.Sc/B.Ed. Degree Programme
Final Examination - 2014/2015
Applied Mathematics - Level 03
APU1142/APE3142 – Differential Equations

Duration: - Two hours

Date: 16.10.2015 **Time: 9:30 a.m. – 11:30 a.m.**

Answer **FOUR** questions only.

1. (a) Solve the initial value problem (IVP):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3e^x+y}{x},\ y(1)=0.$$

[Hint: Use the substitution $y=vx$.]

(b) Solve the differential equation:

$$x\frac{dy}{dx}-2y=x^3\cos x,\ x\neq 0.$$

2. Using a suitable substitution, find the general solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x-y-7}.$$

3. (a) Show that the differential equation $2(x^2y^2+y+x^4)dx+x(1+x^2y)dy=0$ is not exact.

(b) Using a suitable integrating factor, solve the differential equation in part (a).

4. (a) Find the general solution of the differential equation:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+5y=5x^2+4xe^x.$$

(b) Solve the difference equation $u_n+4u_{n-1}+4u_{n-2}=0, n\geq 3$ if $u_1=-2$ and $u_2=12$.

Thus find u_5. (N.B. no credit will be given for other methods.)

5. Show that the power series solution in powers of x, to the differential equation

$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ can be written as

$y(x) = a_0(1-2x^2) + a_1\left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k(-3)(-1)(1)(3)\cdots(2k-3)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)$ where a_0, a_1 are arbitrary constants and $k \in \mathrm{N}$.

6. Let $N = N(t)$ be the size of a population at time t and let r be the growth rate. When the population growth is constrained by limited resources, we can model the phenomena using the *Verhulst equation* given by $\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ where K is the carrying capacity of the environment (constant).

(a) For the above population, using $\tau = rt$ and $x = \frac{N}{K}$, show that $\frac{dx}{d\tau} = x(1-x)$.

(b) Solve the above differential equation to show that $x(\tau) = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{-\tau}}$, where $x(0) = x_0 > 0$.

(c) Find $\lim_{\tau \to \infty}(x(\tau))$ and hence show that the population grows in size until it reaches the carrying capacity K of its environment.

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@ END @@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

00074

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞானமாணி/ கல்விமாணிப் பட்டப் பாடநெறி
இறுதிப் பரீட்சை- **2014/2015**
பிரயோக கணிதம் - மட்டம் **03**
APU1142/APE3142 – வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்

காலம் : - இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

திகதி: **16.10.2015** நேரம்: மு.ப **9:30**– மு.ப **11:30**

நான்கு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

1. (a) தொடக்க பெறுமான பிரச்சினையை (IVP) தீர்க்குக:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3e^x + y}{x}, \; y(1) = 0.$$

[உதவி: பிரதியீடு $y = vx$ இனை உபயோகிக்க.]

(b) $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^3 \cos x, x \neq 0.$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினைத் தீர்க்குக:

2. பொருத்தமான பிரதியீட்டினை உபயோகித்து, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y+1}{x-y-7}.$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வைக் காண்க.

3. (a) வகையீட்டுச் சமன்பாடு $2(x^2y^2 + y + x^4)dx + x(1 + x^2y)dy = 0$ ஆனது செப்பமானது அல்ல எனக் காட்டுக.

(b) பொருத்தமான தொகையீட்டுக் காரணியை பயன்படுத்தி, பகுதி (a) இல் உள்ள வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினைத் தீர்க்குக.

4. (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 5y = 5x^2 + 4xe^x$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வைக் காண்க.

(b) $n \geq 3, u_1 = -2$ மற்றும் $u_2 = 12$ ஆயின் வித்தியாசச் சமன்பாடு $u_n + 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$ இனைத் தீர்க்குக. இதிலிருந்து u_5 இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(குறிப்பு. பிறமுறைகளுக்கு புள்ளிகள் வழங்கப்படமாட்டாது.)

5. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் x இன் வலுக்களின்

வலுத்தொடரின் தீர்வை $y(x) = a_0(1-2x^2) + a_1\left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k(-3)(-1)(1)(3)\cdots(2k-3)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)$

என எழுதலாம் எனக் காட்டுக இங்கு a_0, a_1 ஆகியன எதேச்சை ஒருமைகள் ஆகும்

மற்றும் $k \in \mathrm{N}$.

6. $N = N(t)$ ஆனது நேரம் t இல் குடித்தொகையின் பருமன் மற்றும் r வளர்ச்சி வீதம் ஆகும். குடித்தொகை வளர்ச்சியானது வரையறுக்கப்பட்ட வளங்களால் விகாரப்படுத்தப்படும் போது, $\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ என்னும் வேகல்ஸ்ட் $(Verhulst)$ சமன்பாட்டால் தரப்படும் தோற்றப்பாட்டை எங்களால் உருவாக்க முடியும், இங்கு K ஆனது சூழலின் தாங்கக்கூடிய கொள்ளளவாகும் (மாறிலி).

(a) மேற்குறிப்பிட்ட குடித்தொகையிற்கு, $\tau = rt$ மற்றும் $x = \frac{N}{K}$ இனை உபயோகித்து,

$\frac{dx}{d\tau} = x(1-x)$ எனக் காட்டுக.

(b) $x(\tau) = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{-\tau}}$ எனக் காட்டுவதற்கு மேலே உள்ள வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினைத் தீர்க்குக, இங்கு $x(0) = x_0 > 0$ ஆகும்.

(c) $\lim_{\tau \to \infty}(x(\tau))$ இனைக் காண்க மற்றும் இதிலிருந்து குடித்தொகையின் பருமனானது சூழலின் தாங்கக்கூடிய கொள்ளளவு K ஐ அடையும் வரை வளர்ச்சியடையும் எனக் காட்டுக.

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@ END @@@@@@@@@@@@@@@@@@@@