

බිබි

ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
 විද්‍යාවේදී උපාධි පාඨමාලාව/ඒකාංගික විද්‍යා අධ්‍යාපන පාඨමාලාව
 අවසාන පරීක්ෂණය 2006/2007
 AMU 1181/AME 3181 - අවකල සමීකරණ
 3 වන මට්ටම - ව්‍යවහාරික ගණිතය



060

කාලය :- පැය 2 යි.

දිනය :- 22.11.2006

වේලාව:- පෙ.ව. 9.30 සිට පෙ.ව. 11.30 දක්වා

ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

01. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ වන කුලයට අදාළ වන අවකල සමීකරණය සොයන්න. මෙහි c_1 සහ c_2 අනිමත නියත වේ.

එනමින්, $y'' - 4y = \cos 2x$ හි ව්‍යක්තික විසඳුම සොයන්න. මූලික තත්ත්ව ලෙස $x = 0$ විට $y = 1$ සහ $\frac{dy}{dx} = 2$ බව දී ඇත.

02.(a) දිශා කේතය, පරාවක්‍රය සහ ප්‍රලම්භ පරාවක්‍රය අර්ථ දක්වන්න.

(b) $y' = 1 - y$ වන පළමු ගණයේ අවකල සමීකරණය සඳහා දිශා කේතයක් නිර්මාණය කරන්න.

(c) $y = x + ce^{-x}$ වන කුලකය සඳහා ප්‍රලම්භ පරාවක්‍රයේ සමීකරණය සොයා, (0, 3) හරහා යන ප්‍රලම්භ වක්‍රයේ සමීකරණය නිර්ණය කරන්න.

03. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවකල සමීකරණ විසඳන්න.

(i) $(x^2y - 2xy^2)dx = (x^3 - 3x^2y)dy$,

(ii) $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y) + \cos(x + y)$,

(iii) $y' + xy = xy^2$.

මානි
රුක්මු
ආශ්‍රිත
වැඩ-
සිතිය
විධි
ආරක්-
විධි
විග්‍රහ
විග්‍රහ

විධි
විග්‍රහ

ආශ්‍රිත
cm
ආශ්‍රිත
විග්‍රහ

04.(i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2e^{-x}$ අවකල සමීකරණයේ විසඳුමක් $y = axe^{-x}$ වේ. "a" නියතය අගයන්න.
 $x = 0$ විට $y = 1$ සහ $\frac{dy}{dx} = 3$ මූලික තත්ත්ව යටතේ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(ii) x අක්ෂය ඔස්සේ චලනය වන අංශුවක ඕනෑම t කාලයකදී එහි x -බර්ණධාංකය $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 6t + 5$ වන අවකල සමීකරණය තෘප්ත කරයි.

$t = 0$ විට $x = 11$ සහ $\frac{dx}{dt} = -12$ බව දී ඇත්නම් x හි අවම අවගය $\frac{7}{8} + 3\ln 4$ බව ප්‍රසිද්ධ කරන්න.

05. $P(x_n, y_n)$ සහ $Q(x_{n+1}, y_{n+1})$ යනු $y = f(x)$ වක්‍රය මත ලක්ෂ්‍ය දෙකක් වන අතර මෙහි $x_{n+1} - x_n = h$ වේ. සුදුසු රූප සටහනක් ඇඳ $y_{n+1} \equiv y_n + h\left(\frac{dy}{dx}\right)_n$ බව පෙන්වන්න.

$x = 0$ සහ $y = 1$ වන විට $\frac{dy}{dx} = xy$ අවකල සමීකරණයේ x හි අගය 0 සිට 1 දක්වා වෙනස් වන විට 0.1 පියවර සලකමින් y වල ආසන්න අගයන් සොයන්න.

06.(a) $n(n+1)y_{n+2} - 5n(n+2)y_{n+1} + 4(n+1)(n+2)y_n = 0$ සමාවර්තන සම්බන්ධයේ $y_n = n$ විසඳුමක් බව පෙන්වන්න.

$y_n = nU_n$ ආදේශය මගින් ඒකජ නියත සංගුණක සහිත වන බව පෙන්වා, සමාවර්තන සම්බන්ධයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(b) $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ වන පරිදි යම් න්‍යාස අනුක්‍රමයක්, $A_n - 5A_{n-1} + 6A_{n-2} = 0$ සමාවර්තන සම්බන්ධය තෘප්ත කරයි. A_n සොයන්න.

- හිමිකම් ඇවිරිණි -

The Open University of Sri Lanka
B.Sc Degree Programme/Continuing Education Programme
Final Examination 2006/2007
AMU 1181/AME 3181 – Differential Equations
Level 03 - Applied Mathematics



Duration :- 2 Hours.

Date :- 22-11-2006

Time:- 9.30 am. – 11.30 am.

Answer FOUR questions only.

01. Find the differential equation of the family of curves $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$, where c_1 and c_2 are arbitrary constants.

Hence, find the particular solution of $y'' - 4y = \cos 2x$ with initial conditions $y = 1$ and

$$\frac{dy}{dx} = 2 \text{ when } x = 0.$$

- 02.(a) Define, Direction Field, Trajectory and an Orthogonal trajectory of a curve.

(b) Construct a direction field for the first order differential equation $y' = 1 - y$.

(c) Find the orthogonal trajectories of the family $y = x + ce^{-x}$ and determine the orthogonal trajectory that passes through (0, 3).

03. Solve each of the following differential equations:

(i) $(x^2y - 2xy^2)dx = (x^3 - 3x^2y)dy$,

(ii) $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y) + \cos(x + y)$,

(iii) $y' + xy = xy^2$.

04.(i) Find the value of the constant "a" such that $y = axe^{-x}$ is a solution of the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2e^{-x}$.

Find the solution of this differential equation for which $y = 1$ and $\frac{dy}{dx} = 3$, when $x = 0$.

(ii) A particle moves on the x -axis so that at time t its x -coordinate satisfies the differential equation $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 6t + 5$.

Given that $x = 11$ and that $\frac{dx}{dt} = -12$ when $t = 0$, prove that the least value of x is

$$\frac{7}{8} + 3 \ln 4.$$

05. $P(x_n, y_n)$ is a point on the curve $y = f(x)$ and $Q(x_{n+1}, y_{n+1})$ is another point on the curve where $x_{n+1} - x_n = h$. By drawing a suitable diagram, show that $y_{n+1} \cong y_n + h \left(\frac{dy}{dx} \right)_n$.

Hence calculate approximate values of y corresponding to values of x from 0 to 1 in steps of 0.1 satisfying $\frac{dy}{dx} = xy$ with $y = 1$ when $x = 0$.

06.(a) Show that $y_n = n$ is a solution of the recurrence relation

$$n(n+1)y_{n+2} - 5n(n+2)y_{n+1} + 4(n+1)(n+2)y_n = 0.$$

Show that the substitution $y_n = nU_n$ reduces it to a linear form with constant coefficients and hence obtain the general solution of the recurrence relation.

(b) A sequence of matrices satisfy the recurrence relation $A_n - 5A_{n-1} + 6A_{n-2} = 0$

$$\text{with } A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Find A_n .

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
B.Sc பட்டப்பாடநெறி/தொடர்கல்விப்பாடநெறி
இறுதிப்பரீட்சை 2006/2007
AMU 1181/AME 3181 – வகையீட்டுச்சமன்பாடுகள்
மட்டம் 03 - பிரயோககணிதம்



022

காலம் :- இரண்டு மணித்தியாலங்கள்.

நாள் :- 22-11-2006

நேரம்:- மு.ப. 09.30 – மு.ப. 11.30

நான்கு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

01. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ என்னும் வளையிகளின் குடும்பத்தின் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினைக் காண்க. இங்கு c_1, c_2 ஆகியவை எதேச்சை மாறிலிகளாகும்.

இதிலிருந்து, $y'' - 4y = \cos 2x$ இன் குறித்த தீர்வினைக்(Particular solution) காண்க. இதற்கு தொடக்க நிபந்தனைகளாக, $x = 0$ ஆகும்போது $y = 1$ உம், $\frac{dy}{dx} = 2$ உம் உள்ளன.

02.(a) திசைப்புலம்,கடவை,வளையியொன்றின் நிமிர்கோணக்கடவை ஆகியவற்றை வரையறுக்குக.

(b) முதலாம்படி வகையீட்டுச் சமன்பாடு $y' = 1 - y$ ற்கான ஒரு திசைப்புலத்தினைக் கட்டமைக்குக.

(c) $y = x + ce^{-x}$ என்னும் குடும்பத்தின் நிமிர்கோணக்கடவைகளைக் கண்டு,(0, 3) இனூடாகச் செல்லும் நிமிர்கோணக்கடவையினைத் துணிக.

03. பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையீட்டுச்சமன்பாடுகளையும் தீர்க்க:

(i) $(x^2y - 2xy^2)dx = (x^3 - 3x^2y)dy$,

(ii) $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \cos(x+y)$,

(iii) $y' + xy = xy^2$.

4.(i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2e^{-x}$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்வாக $y = axe^{-x}$

ஆனது இருக்கத்தக்கதாக மாறிலி "a" இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
மேற்குறித்த வகையீட்டுச்சமன்பாட்டின் தீர்வினைக் காண்க. இங்கு $x = 0$ ஆகும் போது $y = 1$ உம், $\frac{dy}{dx} = 3$ உம் ஆகும்.

(ii) ஒரு துணிக்கையானது x -அச்சில் t நேரத்திற்கு அசைகின்றது. அதனது x -ஆள்கூறானது வகையீட்டுச்சமன்பாடு $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 6t + 5$ இனைத் திருப்திப் படுத்துகின்றது.

$t = 0$ ஆகும்போது $x = 11$ உம், $\frac{dx}{dt} = -12$ உம் எனத் தரப்பட்டுள்ளது. x இன் மிகச்

சிறிய பெறுமானமானது $\frac{7}{8} + 3 \ln 4$ என நிறுவுக.

05. $P(x_n, y_n)$ ஆனது வளையி $y = f(x)$ இலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். அத்தோடு $Q(x_{n+1}, y_{n+1})$ ஆனது குறித்த வளையி மீதுள்ள மற்றைய புள்ளியாகும்.

இங்கு $x_{n+1} - x_n = h$ ஆகும். பொருத்தமான வரிப்படத்தை வரைவதனால்,

$y_{n+1} \equiv y_n + h \left(\frac{dy}{dx} \right)_n$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, x இன் பெறுமானமானங்கள் 0 இலிருந்து 1 வரை படிநீளம் 0.1 ஆல் அதிகரிக்கும்போது அப் பெறுமானங்களுக்கொத்த y இன் பெறுமானங்களை, $\frac{dy}{dx} = xy$ இனையும், $x = 0$ ஆகும்போது $y = 1$ இனையும் திருப்திப்படுத்தும் விதத்தில் காண்க.

06.(a) $y_n = n$ ஆனது $n(n+1)y_{n+2} - 5n(n+2)y_{n+1} + 4(n+1)(n+2)y_n = 0$ என்னும்

மடங்குத் தொடர்பின் ஒரு தீர்வாகுமெனக் காட்டுக.

$y_n = nU_n$ என்னும் பிரதியீட்டினால் அதனை மாறிலிக்குணகத்துடனான ஏகபரிமாண வடிவில் ஒடுக்கப்படலாமெனக் காட்டி, குறித்த மடங்குத்தொடர்பின் பொதுத்தீர்வினைப் பெறுக.

(b) ஒரு தாயத்தொடரியானது $A_n - 5A_{n-1} + 6A_{n-2} = 0$ என்னும் மடங்குத்தொடர் பினைத் திருப்திப்படுத்துகின்றது.

இங்கு $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ஆகும்.

A_n இனைக் காண்க.