ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදි උපාධි පාඨමාලාව
ව්‍යවහාරික ගණිතය - මට්ටම - 03
අවසාන පරීක්ෂණය - 2011/2012
AMU1182 / AME3182 – කේතුක හා දෛශික විජීය
කාලයඃ පැය 2 යි.

දිනය :- 07-12-2012 වේලාව :- පෙ.ව. 9.30 - පෙ.ව. 11.30 දක්වා

ප්‍රශ්ණ හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (a) $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Fx+2Gy+H=0,$ යන කේතුකය සලකන්න. මෙහි $A, B\ C, F, G$ සහ H යනු නියත වේ.

ඉහත කේතුකය
(i) වෘත්තයක්
(ii) පරාවලයක්
(iii) බහුවලයක්
(iv) ඉලිප්සයක්

වීම සඳහා අවශ්‍ය සියලුම තත්ව ලියා දක්වන්න.

(b) ඉහත සමීකරණය, අක්ෂ θ කෝණයකින් භ්‍රමණය කිරීමෙන් $ax^2+cy^2+2fx+2gy+h=0$ ආකාරයට ලියා දැක්විය හැක. θ කෝණයෙහි අගය සොයන්න.

(c) පහත දී ඇති කේතුක සමීකරණ සම්මත සමීකරණ බවට ඌනනය කර එමගින් පහත කේතුක හඳුනා ගන්න.
(i) $xy=1$
(ii) $4x^2-4xy+7y^2-24=0.$

2. $5x^2+2\sqrt{5}xy+y^2-x+y-5=0$ යන කේතුක සමීකරණය සලකන්න.

(a) ඉහත සමීකරණය න්‍යාස ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

(b) ඉහත කේතුකයෙහි සංසටික න්‍යාසය වන $\underline{A}$ ලියා දක්වන්න. තවද $\underline{P}^T\,\underline{AP}=\underline{D},$ වන පරිදි $\underline{P}$ ප්‍රලම්භ න්‍යාසයක් සොයන්න. මෙහි $\underline{D}$ යනු විකර්ණ න්‍යාසයයි.
එමගින් $5x^2+2\sqrt{5}xy+y^2-x+y-5=0$ කේතුකය හඳුනාගන්න.

3. (a) $4\underline{i}-5\underline{j}$ දෛශිකයට ලම්භක ඒකක දෛශිකය සොයන්න.

   (b) ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක් $\underline{A}=3\underline{i}+6\underline{j}-2\underline{k}$ සහ $\underline{B}=4\underline{i}-\underline{j}+3\underline{k}$ මගින් සෑදී ඇත.
   ත්‍රිකෝණයේ කෝණවල අගයන් සොයන්න.

   (c) $ABCD$ යනු සමාන්තරාස්‍රයකි. $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$ බව සාධනය කරන්න.

4. $\underline{u}$ හා $\underline{v}$ යනු t හි දෛශික ශ්‍රිත වන අතර සංරචක මගින් නිරූපනය වේ.

   (i) $\frac{d}{dt}(\underline{u}\cdot\underline{v})$ සහ $\frac{d}{dt}(\underline{u}\wedge\underline{v})$ සඳහා සමීකරණ සොයන්න.

   (ii) $\underline{a},\underline{b}$ හා $\underline{c}$ යනු t හි දෛශික ශ්‍රිත වන විට (i) වන කොටස භාවිතයෙන් $\frac{d}{dt}\{\underline{a}.(\underline{b}\wedge\underline{c})\}$ සහ
   $\frac{d}{dt}\{\underline{a}\wedge(\underline{b}\wedge\underline{c})\}$ සඳහා සමීකරණ ලබා ගන්න.

   (iii) එමගින් $\frac{d}{dt}\left\{\underline{v}.\left(\frac{d\underline{v}}{dt}\wedge\frac{d^2\underline{v}}{dt^2}\right)\right\}$ ලබා ගන්න.

5. (a) $(6,3)$,ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරන්නා වූද, $2\underline{i}-\underline{j}$ දෛශිකයට සමාන්තර වූද, සරල රේඛාවේ
   දෛශික සමීකරණය සොයන්න. තවද මෙම රේඛාව හා අක්ෂයන් සමග සාදන අන්තංඛණ්ඩ
   සොයන්න.

   (b) පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{a}$ වන A ලක්ෂ්‍ය හරහා ගමන් කරන්නා වූද, $\underline{n}$ දෛශිකයට ලම්භක වූද,
   සරල රේඛාවේ දෛශික සමීකරණය සොයන්න.

   (c) $A(2,3,1)$, ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරන්නා වූද, $B(3,1,-1)$ සහ $C(-1,1,3)$ ලක්ෂ්‍ය හරහා ගමන්
   කරන සරල රේඛාවට සමාන්තර වූද, සරල රේඛාවේ දෛශික සමීකරණය සොයන්න.
   $(2,-3,5)$ ලක්ෂ්‍යය එම රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

6. (a) මූල ලක්ෂ්‍යයට p දුරකින් සහ $\hat{\underline{n}}$ වන ඒකක දෛශිකයට ලම්භකව පිහිටයි.
   ($\hat{\underline{n}}$ මූල ලක්ෂ්‍යයට ඉවතින් පිහිටා ඇත.)
   තලයක දෛශික සමීකරණය $\underline{r}\cdot\hat{\underline{n}}=p$ බව ඔප්පු කරන්න. මෙහි $\underline{r}$ යනු තලය මත පිහිටි ඕනෑම
   ලක්ෂ්‍යයක පිහිටුම් දෛශිකය වේ.

   (b) A වන ලක්ෂ්‍යයෙහි පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{a}$ වන අතර එය $\underline{r}\cdot\hat{\underline{n}}=p$ යන තලයට l දුරකින් පිහිටයි
   l සඳහා ප්‍රකාශනයක් සොයන්න.

   එමගින් පිහිටුම් දෛශිකය $(\underline{i}-3\underline{j}+3\underline{k})$ වන ලක්ෂ්‍යයට $\underline{r}\cdot(2\underline{i}+3\underline{j}-6\underline{k})=9$ වනතලයේ සිට
   ඇති දුර සොයන්න.

The Open University of Sri Lanka
B.Sc. /B.Ed. Degree Programme
Final Examination 2011/2012
Level 03 - Applied Mathematics
AMU 1182/AME 3182 – Conics and Vector Algebra

Duration :- Two Hours

Date :- 07-12-2012 **Time:- 09.30 a.m. – 11.30 p.m.**

Answer Four Questions Only

1. Consider the conic $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Fx+2Gy+H=0$, where $A, B\ C, F, G$ and H are constants.
   (a) Write all the necessary conditions for the above conic to be
      (i) a circle,
      (ii) a parabola,
      (iii) a hyperbola, and
      (iv)an ellipse.
   (b) The above equation can be reduced to the form $ax^2+cy^2+2fx+2gy+h=0$ by rotating the axes about the origin through an angle θ. Find the value of angle θ.
   (c) Reduce each of the following equations of conics to the standard forms and identify the conics:
      (i) $xy=1$,
      (ii) $4x^2-4xy+7y^2-24=0$.

2. Consider the conic equation $5x^2+2\sqrt{5}xy+y^2-x+y-5=0$.
   (a) Express the above equation in matrix form.
   (b) Write down the associated matrix $\underline{A}$, and find an orthogonal matrix $\underline{P}$ such that $\underline{P}^T\underline{AP}=\underline{D}$, where $\underline{D}$ is a diagonal matrix.
   Hence, identify the given conic.

3. (a) Find the unit vector perpendicular to the vector $4\underline{i}-5\underline{j}$.
   (b) Two sides of a triangle are formed by the vectors $\underline{A}=3\underline{i}+6\underline{j}-2\underline{k}$ and $\underline{B}=4\underline{i}-\underline{j}+3\underline{k}$.
   Determine the angles of the triangle.
   (c) Let $ABCD$ be a parallelogram. Prove that $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$.

4. Let $\underline{u}$ and $\underline{v}$ be vector functions of t in component form.

(i) Find formulae for $\frac{d}{dt}(\underline{u}.\underline{v})$ and $\frac{d}{dt}(\underline{u} \wedge \underline{v})$.

(ii) Using part (i) find $\frac{d}{dt}\{\underline{a}.(\underline{b} \wedge \underline{c})\}$ and $\frac{d}{dt}\{\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c})\}$ where $\underline{a}$, $\underline{b}$ and $\underline{c}$ are vector functions of t.

(iii) Hence, obtain $\frac{d}{dt}\left\{\underline{v}.\left(\frac{d\underline{v}}{dt} \wedge \frac{d^2\underline{v}}{dt^2}\right)\right\}$.

5. (a) Find the vector equation of the line which passes through the point (6, 3) and parallel to the vector $2\underline{i} - \underline{j}$. Also find x intercept and y intercept of this line.

(b) Find the vector equation of a straight line which passes through a given point A with the position vector $\underline{a}$ and perpendicular to the vector $\underline{n}$.

(c) Find the vector equation of a straight line through a point $A(2,3,1)$ and parallel to the line through the points $B(3,1,-1)$ and $C(-1,1,3)$. Verify that the point $(2,-3,5)$ is on the line.

6. (a) A plane is at a distance p from the origin and is perpendicular to the unit vector $\hat{\underline{n}}$. ($\hat{\underline{n}}$ is directed away from O).

Prove that the vector equation of a plane is $\underline{r} \cdot \hat{\underline{n}} = p$, where $\underline{r}$ is the position vector at any point on the plane.

(b) A point A with position vector $\underline{a}$ is at a distance l from the plane with equation $\underline{r} \cdot \hat{\underline{n}} = p$. Find an expression for l.

Hence, find the distance of the point with position vector $(\underline{i} - 3\underline{j} + 3\underline{k})$ from a plane whose equation is $\underline{r} \cdot (2\underline{i} + 3\underline{j} - 6\underline{k}) = 9$.

00024

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞானமாணி/கல்விமாணி பட்டப்பாடநெறி
இறுதிப் பரீட்சை 2011/2012
பிரயோக கணிதம் – மட்டம் 03
AMU 1182/AME 3182 – கூம்புவளைவுகளும் காவி அட்சரகணிதமும்

காலம் :- இரண்டு மணித்தியாலங்கள்.

நாள் :- 07-12-2012 நேரம்:- மு.ப 9.30– மு.ப 11.30

நான்கு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

1. $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Fx+2Gy+H=0$ என்னும் கூம்புவளைவைக் கருதுக, இங்கு $A, B\ C, F, G$ மற்றும் H என்பன மாறிலிகளாகும்.

(a) மேற்கூறப்பட்ட கூம்புவளைவானது

(i) வட்டம்

(ii) பரவளைவு

(iii) அதி பரவளைவு

(iv) நீள்வளையம் ஆவதற்கு அவசியமான நிபந்தனைகள் எல்லாவற்றையும் எழுதுக.

(b) மேற்கூறப்பட்ட கூம்புவளைவை உற்பத்தி பற்றி அச்சுக்களை கோணம் θ ஒன்றினூடாக சுழற்றுவதன் மூலம் $ax^2+cy^2+2fx+2gy+h=0$ என்னும் வடிவத்திற்கு ஒடுக்கலாம். கோணம் θ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(c) பின்வரும் ஒவ்வொரு கூம்புவளைவு சமன்பாடுகளையும் நியம வடிவத்திற்கு ஒடுக்குக, மற்றும் கூம்புவளைவுகளை இனங்காண்க.

(i) $xy=1$

(ii) $4x^2-4xy+7y^2-24=0.$

2. $5x^2+2\sqrt{5}xy+y^2-x+y-5=0$ என்னும் கூம்புவளைவின் சமன்பாட்டைக் கருதுக.

(a) மேற்கூறப்பட்ட சமன்பாட்டை தாயவடிவில் தருக.

(b) இத்துடன் தொடர்புடைய தாயம் $\underline{A}$ ஐ எழுதி, $\underline{P}^T\underline{AP}=\underline{D}$ ஆக அமையுமாறு நிமிர்கோணத்தாயம் $\underline{P}$ ஐக் காண்க, இங்கு $\underline{D}$ ஆனது மூலைவிட்டத்தாயமாகும். இதிலிருந்து, தரப்பட்ட கூம்புவளைவை இனங்காண்க.

3. (a) $4\underline{i}-5\underline{j}$ என்னும் காவிக்கு செங்குத்தாகவுள்ள அலகுக்காவியைக் காண்க.

(b) முக்கோணியின் இருபக்கங்கள் $\underline{A}=3\underline{i}+6\underline{j}-2\underline{k}$ மற்றும் $\underline{B}=4\underline{i}-\underline{j}+3\underline{k}$ என்னும் காவிகளால் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. இம்முக்கோணிகளின் கோணங்களைத் துணிக.

(c) $ABCD$ என்பது ஒரு இணைகரம் என்க. $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$ என நிறுவுக.

92

4. $\underline{u}$ மற்றும் $\underline{v}$ என்பன t இலுள்ள காவிச்சார்புகளாவதோடு, கூறுகளாகவும் உள்ளன.

(i) $\frac{d}{dt}(\underline{u}.\underline{v})$ மற்றும் $\frac{d}{dt}(\underline{u} \wedge \underline{v})$ என்பவற்றிற்கான சூத்திரங்களைக் காண்க.

(ii) பகுதி (i) ஐப் பாவித்து $\frac{d}{dt}\{\underline{a}.(\underline{b} \wedge \underline{c})\}$ மற்றும் $\frac{d}{dt}\{\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c})\}$ என்பவற்றிற்கான சூத்திரங்களைக் காண்க. இங்கு $\underline{a}, \underline{b}$ மற்றும் $\underline{c}$ என்பன t இலுள்ள காவிச்சார்புகளாகும்.

(iii) இதிலிருந்து, $\frac{d}{dt}\left\{\underline{v}.(\frac{d\underline{v}}{dt} \wedge \frac{d^2\underline{v}}{dt^2})\right\}$ ஐப் பெறுக.

5. (a) $(6,3)$ என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்வதும் $2\underline{i} - \underline{j}$ என்னும் காவிக்கு சமாந்தரமானதுமான கோட்டின் காவிச்சமன்பாட்டைக் காண்க. இக்கோடு x மற்றும் y அச்சுக்களோடு அமைக்கும் வெட்டுத்துண்டுகளை காண்க.

(b) $\underline{a}$ ஐத் தனக்காவியாக உடைய தரப்பட்ட புள்ளி A யினூடாக செல்வதும், $\underline{n}$ என்னும் காவிக்கு செங்குத்தாகவுள்ளதுமான கோட்டின் காவிச்சமன்பாட்டைக் காண்க.

(c) $A(2,3,1)$ என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்வதும் $B(3,1,-1)$ மற்றும் $C(-1,1,3)$ என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் கோட்டிற்குச்சமாந்தரமானதுமான கோட்டின் காவிச்சமன்பாட்டைக் காண்க. $(2,-3,5)$ என்னும் புள்ளி அந்நேர்கோட்டின் மீதுள்ளதா என வாய்ப்புப்பார்க்குக.

6. (a) உற்பத்தியிலிருந்து தளமொன்று p தூரத்தில் அமைந்துள்ளதோடு, அலகுக்காவி $\hat{\underline{n}}$ இற்கு செங்குத்தாகவும் உள்ளது. (இங்கு $\hat{\underline{n}}$ ஆனது உற்பத்தியிலிருந்து வெளிநோக்கிய திசையிலுள்ளது.) தளத்திற்கான காவிச்சமன்பாடானது $\underline{r} \cdot \hat{\underline{n}} = p$ எனக் காட்டுக. இங்கு $\underline{r}$ ஆனது தளத்திலுள்ள யாதாயினுமொரு புள்ளியின் தனக்காவியாகும்.

(b) தனக்காவி $\underline{a}$ ஐ உடைய புள்ளியிலிருந்து $\underline{r} \cdot \hat{\underline{n}} = p$ என்னும் காவித்தளத்திற்கான தூரமானது l ஆகுமெனின் l ஆன கோவையைக் காண்க. இதிலிருந்து, $(\underline{i} - 3\underline{j} + 3\underline{k})$ என்னும் தனக்காவியையுடைய புள்ளியிலிருந்து $\underline{r} \cdot (2\underline{i} + 3\underline{j} - 6\underline{k}) = 9$ என்னும் சமன்பாட்டைக் கொண்ட தளத்திற்கான தூரத்தைக் காண்க.