

ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
 විද්‍යාල පිළිබඳ පදනම් පාඨමාලාව
 අවසාන පරීක්ෂණය 2006/2007
 MAF 1301/MAE 1301 - ශුද්ධ ගණිතය - ප්‍රශ්න පත්‍රය II



0. 002

කාලය :- පැය 3 යි.

දිනය :- 27-10-2006

වේලාව:- පෙ.ව. 9.30 සිට ප.ව. 12.30 දක්වා

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

01. (a) $\log_n(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$ බව පෙන්වන්න.

එනමින් $\frac{1}{\log_n(abc)} + \frac{1}{\log_b(abc)} + \frac{1}{\log_c(abc)} = 1$ බව පෙන්වන්න.

(b) $\left(\frac{2x^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{3}} \times y^{\frac{1}{2}}} \right)^{-2} \times \left(\frac{8x^{\frac{5}{2}} \times y^{-4}}{x^{-\frac{1}{2}} \times y^2} \right)$ ප්‍රකාශනය සුළුකරන්න.

02. (i) $px^2 - qx + r = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β නම් මූලයන් $\frac{\alpha}{\beta}$ හා $\frac{\beta}{\alpha}$ වන සමීකරණය ලියන්න.

(ii) $\frac{4t}{(1+t^2)(t-1)(t-2)}$ යන්න භින්නභාග වලට වෙන් කරන්න.

(iii) $f(x) = 2x^3 + kx^2 + lx - 3$ යන්න $(x-1)$ හා $(x+3)$ මගින් ඉතිරි නැතිව බෙදෙනම් k හා l සොයන්න.

03 (i) $x = 1/3$ විට $\left(3x - \frac{5}{2x} \right)^{11}$ හි ප්‍රසාරණයේ සංඛ්‍යාත්මක වශයෙන් විශාලතම පදය සොයන්න.

(ii) $\left(8x + \frac{1}{4x^2} \right)^{12}$ ප්‍රසාරණයේ x ගෙන් ස්වායක්ත පදය ලියන්න.

(iii) 'KAHATAGASDIGILIYA' යන වචනයේ අකුරු සියල්ල භාවිතා කරමින් සෑදිය හැකි ආකාර ගණන සොයන්න.

(iv) සියලුම $x \in R$ සඳහා $x^2 + x + 1 > 0$ බව පෙන්වන්න.

04. (i) ධන නිඛිලයන් සඳහා ද මූලාවර් ප්‍රමේය ලියන්න.

(ii) $z = \cos \theta + i \sin \theta$ නම් $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $n \in \mathbb{Z}^+$ වේ.

එනමින් $z^3 + \frac{1}{z^3} = 2 \cos 3\theta$ බව පෙන්වා $\left(z + \frac{1}{z}\right)^3$ උපයෝගීකොටගෙන
 $4 \cos^3 \theta = \cos 3\theta + 3 \cos \theta$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $z_1 = 1 + i, z_2 = -1 + i, z_3 = -1 - i$ හා $z_4 = 1 - i$ යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා මූලවක ආකාරයෙන් ලියන්න. එමගින් z_1, z_2, z_3, z_4 ආගන් සටහනේ ලකුණු කරන්න.

05. (i) $\sqrt{2} \left\{ \cos^2 \left(\frac{\pi}{8} - \theta \right) - \cos^2 \left(\frac{\pi}{8} + \theta \right) \right\} = \sin 2\theta$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\theta + \phi = \frac{\pi}{4}$ නම් $(1 + \tan \theta)(1 + \tan \phi) = 2$ බව පෙන්වන්න. එනමින් $\tan \frac{\pi}{8}$ අගයන්න.

(iii) $\cos \theta + \cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta + 2\alpha) + \cos(\theta + 3\alpha) = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \cos\left(\theta + \frac{3\alpha}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

α යනු $\frac{\pi}{2}$ හි ගුණාකාරයක් නොවන විට

$\cos \theta + \cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta + 2\alpha) + \cos(\theta + 3\alpha) = 0$ සමීකරණයේ θ සඳහා සාධාරණ විසඳුම ලියන්න.

06. (i) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ නම් $\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\tan \theta}{\theta} \right) = 1$ බව පෙන්වන්න.

(ii) පහත සඳහන් සීමා සොයන්න (a) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\theta + \sin 5\theta}{\theta - \sin 5\theta} \right)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \right)$.

(iii) x විෂයෙන් අවකලනය කරන්න

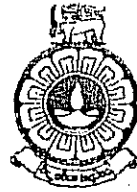
(a) $\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ (b) $\ln|\sqrt{x^2+25} + x|$ (c) $x \tan^{-1}(x)$.

07. If $u_i = a_i x + b_i y + c_i$ ($i=1,2$) යනු සරල රේඛා දෙකක් නම් $u_1 + \lambda u_2 = 0$ විචරණය කරන්න. λ යනු පරාමිතියකි.

$ax + by + c = 0, ax + by + d = 0, a'x + b'y + c' = 0$ සහ $a'x + b'y + d' = 0$ සරල රේඛා මගින් සමාන්තරාස්‍රයක් දක්වේ. ශීර්ෂ වල ඛණ්ඩාංක නොසොයා එහි විකර්ණ වල සමීකරණ ලියන්න.

08. (i) $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ සහ $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$ වෘත්ත දෙක බාහිරව ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

(ii) $x + 3y = 1$ රේඛාව $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$ වෘත්තය ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න. ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න. $P(3, 5/2)$ ලක්ෂ්‍ය වෘත්තයෙන් පිටත පිහිටන බව පෙන්වන්න. එම P ලක්ෂ්‍යයේ සිට වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග සොයන්න.



Duration :- Three (3) Hours

Date :- 27-10-2006

Time:- 9.30 am. – 12.30 pm.

Answer FIVE questions only.

01. (a) Show that $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$.

Hence show that $\frac{1}{\log_a(abc)} + \frac{1}{\log_b(abc)} + \frac{1}{\log_c(abc)} = 1$.

(b) Simplify the expression

$$\left(\frac{2x^{\frac{1}{3}} \times y^{-\frac{3}{2}}}{x^{-\frac{2}{3}} \times y^{\frac{1}{2}}} \right)^{-2} \times \left(\frac{8x^{\frac{5}{2}} \times y^{-4}}{x^{-\frac{1}{2}} \times y^2} \right)$$

02. (i) Given that α and β are the roots of the equation $px^2 - qx + r = 0$, find the quadratic equation whose roots are $\frac{\alpha}{\beta}$ and $\frac{\beta}{\alpha}$.

(ii) Express $\frac{4t}{(1+t^2)(t-1)(t-2)}$ in partial fractions.

(iii) $f(x) = 2x^3 + kx^2 + lx - 3$ is divisible by the factors $(x-1)$ and $(x+3)$.

Determine k and l .

03 (i) Find the largest term of the expansion $\left(3x - \frac{5}{2x}\right)^{11}$ when $x = 1/3$.

(ii) Find the term which is independent of x in the expression of $\left(8x + \frac{1}{4x^2}\right)^{12}$.

(iii) Find the number of different ways of arranging the letters of the word 'KAHATAGASDIGILIYA'.

(iv) Prove that $x^2 + x + 1 > 0$ when $x \in R$.

04. (i) State de Moivre's theorem for a positive integral index.

(ii) If $z = \cos \theta + i \sin \theta$ then prove that $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta$. Where $n \in \mathbb{Z}^+$

Hence show that $z^3 + \frac{1}{z^3} = 2 \cos 3\theta$ using the expression of $\left(z + \frac{1}{z}\right)^3$ prove that

$$4\cos^3 \theta = \cos 3\theta + 3\cos \theta.$$

(iii) Express the complex numbers $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -1 - i$ and $z_4 = 1 - i$ in polar form. Hence plot z_1, z_2, z_3, z_4 in argand diagram.

05. (i) Prove that $\sqrt{2} \left\{ \cos^2 \left(\frac{\pi}{8} - \theta \right) - \cos^2 \left(\frac{\pi}{8} + \theta \right) \right\} = \sin 2\theta$.

(ii) If $\theta + \phi = \frac{\pi}{4}$ show that $(1 + \tan \theta)(1 + \tan \phi) = 2$.

Deduce the value of $\tan \frac{\pi}{8}$.

(iii) Prove that $\cos \theta + \cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta + 2\alpha) + \cos(\theta + 3\alpha) = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \cos\left(\theta + \frac{3\alpha}{2}\right)$

Assuming that α is not a multiple of $\frac{\pi}{2}$, deduce a general expression for the values of θ which satisfy the equation $\cos \theta + \cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta + 2\alpha) + \cos(\theta + 3\alpha) = 0$.

06. (i) Given that $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$. Hence prove that $\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\tan \theta}{\theta} \right) = 1$.

(ii) Find the following limits (a) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\theta + \sin 5\theta}{\theta - \sin 5\theta} \right)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \right)$.

(iii) Differentiate with respect to x :

(a) $\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ (b) $\ln|\sqrt{x^2+25} + x|$ (c) $x \tan^{-1}(x)$.

07. If $u_i = a_i x + b_i y + c_i$ ($i=1,2$) are two straight lines what is the mean by $u_1 + \lambda u_2 = 0$ where λ is a parameter.

$ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ and $a''x + b''y + c'' = 0$ are sides of parallelogram. Without finding the edges of the parallelogram find the equations of two diagonals.

08. (i) Prove that the circles $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$ touch each other externally and find the equations of their common tangent.

(ii) Show that the line $x + 3y = 1$ touches the circle, $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$, and find the coordinates of contact. Prove that by calculation that the point $P(3, 5/2)$ lies outside the circle and calculate also the length of the tangent drawn to the circle from P .

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞானத்தில் அடிப்படைப்பாடநெறி
இறுதிப்பரீட்சை 2006/2007
MAF 1301/MAE 1301-தூயகணிதம் வினாத்தாள்-II



001

காலம்:மூன்று(3)மணித்தியாலங்கள்

நாள்:- 27-10-2006

நேரம்: பி.ப9.30 - பி.ப12.30

ஐந்து வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

(01) (a) $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\frac{1}{\log_a(abc)} + \frac{1}{\log_b(abc)} + \frac{1}{\log_c(abc)} = 1$ எனக் காட்டுக.

(b) பின்வரும் கோவையைச் சுருக்குக.

$$\left(\frac{2x^{\frac{1}{3}} \times y^{-\frac{3}{2}}}{x^{-\frac{2}{3}} \times y^{\frac{1}{2}}} \right)^{-2} \times \left(\frac{8x^{\frac{5}{2}} \times y^{-4}}{x^{-\frac{1}{2}} \times y^2} \right)$$

(02) (i) α, β என்பன $px^2 - qx + r = 0$ இன் மூலங்களாகத் தரப்பட்டுள்ளன. $\frac{\alpha}{\beta}$,

$\frac{\beta}{\alpha}$ என்பனவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச்சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(ii) $\frac{4t}{(1+t^2)(t-1)(t-2)}$ ஐ பகுதிப் பின்னமாக எடுத்துரைக்குக.

(iii) $f(x) = 2x^3 + kx^2 + lx - 3$ என்னும் சார்பானது $(x-1), (x+3)$ என்னும் காரணிகளினால் வகுபடக்கூடியது.

k, l என்பனவற்றைக் காண்க.

(03) (i) $x = 1/3$ ஆக உள்ளபோது $\left(3x - \frac{5}{2x}\right)^{11}$ இன் விரிவில் பெரிய உறுப்பினைக் காண்க.

(ii) $\left(8x + \frac{1}{4x^2}\right)^{12}$ இன் விரிவில் x சார்பு உறுப்பினைக் காண்க.

(iii) 'KAHATAGASDIGILIYA' என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களை எத்தனை வெவ்வேறான வழிகளில் ஒழுங்குபடுத்த முடியுமெனக் காட்டுக.

(iv) $x \in \mathbb{R}$ ஆகும்போது $x^2 + x + 1 > 0$ என நிறுவுக.

(04) (i) நேர்முழுவெண் சுட்டிக்காண தாமோய்வரின் தேற்றத்தைக் கூறுக.

(ii) $z = \cos \theta + i \sin \theta$ எனின் $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta$ என நிறுவுக. இங்கு $n \in \mathbb{Z}$ ஆகும்.

இதிலிருந்து $z^3 + \frac{1}{z^3} = 2 \cos 3\theta$ எனக் காட்டுக. $\left(z + \frac{1}{z}\right)^3$ இன் விரிவினைப் பாவித்து $4 \cos^3 \theta = \cos 3\theta + 3 \cos \theta$ என நிறுவுக.

(iii) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -1 - i$ மற்றும் $z_4 = 1 - i$ ஆகிய சிக்கலெண்களை முல்லை வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க. ஆதல்ருந்து z_1, z_2, z_3, z_4 ஆகியவற்றை ஆகன வரிப்படத்தில் குறிக்க.

(05) (i) $\sqrt{2} \left\{ \cos^2 \left(\frac{\pi}{8} - \theta \right) - \cos^2 \left(\frac{\pi}{8} + \theta \right) \right\} = \sin 2\theta$ என நிறுவுக.

(ii) $\theta + \phi = \frac{\pi}{4}$ எனின், $(1 + \tan \theta)(1 + \tan \phi) = 2$ எனக் காட்டுக.

$\tan \frac{\pi}{8}$ இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

(iii) $\cos \theta + \cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta + 2\alpha) + \cos(3\theta + \alpha) = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \cos\left(\theta + \frac{3\alpha}{2}\right)$ என நிறுவுக.

α ஆனது $\frac{\pi}{2}$ இன் பெருக்கமில்லையெனக் கருதி, θ இன் பெறுமானங்களுக்கு $\cos \theta + \cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta + 2\alpha) + \cos(\theta + 3\alpha) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டினை அது திருப்தி செய்யுமென உய்த்தறிக.

(06) (i) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\tan \theta}{\theta} \right) = 1$ என நிறுவுக.

(ii) பின்வருவனவற்றின் எல்லைகளைக் காண்க.

$$(a) \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\theta + \sin 5\theta}{\theta - \sin 5\theta} \right) \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \right)$$

(iii) x குறித்து வகையிடுக.

$$(a) \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \quad (b) \ln|\sqrt{x^2+25}+x| \quad (c) x \tan^{-1}(x).$$

(07) $u_i = a_i x + b_i y + c_i$ ($i=1,2$) ஆகியவை இரு தோடுகளுக்கெனின் $u_1 + \lambda u_2 = 0$ என்பதனால் விளங்கிக்கொள்வது யாது? இங்கு λ என்பது ஒரு பரமானமாகும்.

$ax + by + c = 0$, $ax + by + d = 0$, $a'x + b'y + c = 0$ மற்றும் $a'x + b'y + d' = 0$ ஆகியவை இணைகரமொன்றின் பக்கங்களாகும். இணைகரத்தின் உச்சிகளைக் காணாது மூலைவிட்டங்கள் இரண்டினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(08) (i) வட்டங்கள் $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$ என்பவை ஒன்றையொன்று வெளியே தொடுகின்றன எனக் நிறுவுக. மேலும் அவற்றின் பொதுத்தொடலியின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(ii) $x + 3y = 1$ என்னும் கோடானது, $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$ என்னும் வட்டத்தினைத் தொடுகின்றதெனக் காட்டி, தொடுபுள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. புள்ளி $P(3, 5/2)$ ஆனது வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியென கணிப்புக்களின் உதவியுடன் நிறுவுக. அத்தோடு P யிலிருந்து வரையப்படும் தொடலியின் நீளத்தினைக் கணிக்கുക.