



ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය

විද්‍යාව හා තාක්ෂණය පිළිබඳ පදනම් පාඨමාලාව - දෙවන මට්ටම

අවසාන පරීක්ෂණය 2014/2015

PAF 2201/PAE 2201 - සංයුක්ත ගණිතය - ප්‍රශ්න පත්‍රය I

කාලය - පැය 03 යි.

දිනය - 2015.11.19

දිනය - පෙ.ව.09.30 - ප.ව.12.30 දක්වා

සියළුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න.

A - කොටස

01. $\log_5(4-x) - 2\log_5(x) = 1$ වන පරිදි x අගයන්න.
02. C නම් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $(+1,7)$ වේ. එය $(0,0)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි. C වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.
03. (a) $4x-5 > 15-x$
(b) $x(x-4) > 12$
වන අසමානතා සපුරාලන x අගයන්ගේ පරාස සොයන්න.
04. $y = 9 - 4x - \frac{8}{x}$ නම්
(a) $\frac{dy}{dx}$ (b) $\int y dx$ අගයන්න.
05. $x^2 + 3px + p = 0$ සමීකරණයේ p නිශ්ශුන්‍ය නියතයකි. මෙම සමීකරණයට සමාන මූල තිබීම සඳහා p අගයන්න.
06. $(i+1)^3$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ මාපාංකය සහ විස්ථාරය සොයන්න.
07. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\theta + 2 \sin \theta}{\theta - 2 \sin \theta} \right)$ අගයන්න.

08. $\left(2x^2 + \frac{1}{3x}\right)^{12}$ ප්‍රසාරණයේ x අඩංගු නොවන පදය ලියන්න.

09. $\frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$ යන ප්‍රකාශය $a+b\sqrt{5}$ ආකාරයෙන් ලියන්න. මෙහි a හා b යනු නිඛිල වේ.

10. $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ 2×2 වන න්‍යාසයකි.

$P^2 - 3P + 2I = 0$ බව පෙන්වන්න. මෙම I යනු 2×2 තත්කාමය න්‍යාසයද 0 යනු 2×2 අභිගුණ න්‍යාසය ද වේ.

B - කොටස

ප්‍රශ්න පහකට (05) පිළිතුරු සපයන්න.

11. (i) k නියතයක් වන $(k+3)x^2 + 6x + k = 5$ වර්ගජ සමීකරණයට තාත්වික ප්‍රතිඵල මූල දෙකක් තිබීම සඳහා,

- (a) $k^2 - 2k - 24 < 0$ අසමීකරණය k තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.
 (b) ඒ මගින් k හි අගය පරාසය ලියන්න.

(ii) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax + 18$ ලෙස ගනිමු. මෙහි a යනු නියත පදයකි.

$(x-3)$ යන්න $f(x)$ සාධකයක් නම්,

- (a) $a = -9$ බව පෙන්වන්න.
 (b) $f(x)$ සම්පූර්ණයෙන් සාධකවලට වෙන් කරන්න.

12. (i) ගණිත අභ්‍යුහනය මගින්

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

(ii) $r^2(r+1)^2 - r^2(r-1)^2 = 4r^3$ බව පෙන්වන්න.

එනැයිත් $\sum_{r=1}^n r^3 = \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2$ බව පෙන්වන්න.

එනැයිත් $\sum_{r=1}^n (2r-1)(2r+1)(r)$ අගයන්න.

මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේද? හේතු දක්වන්න.

- (iii) $(2+3x)^5$ ප්‍රසාරණයේ x හි ආරෝහන බල පිලිවෙලට සිටින සේ මුල් පද හතර ලියන්න.
සෑම පදයක්ම සරලම ආකාරයෙන් ලියන්න.

13. (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ සහ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ නම් $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ බව පෙන්වන්න.

(ii) (a) $|Z+1| = 5$ (b) $\arg(Z-1) = \frac{2\pi}{3}$ යන අවස්ථා දෙකේදී Z හි පථය වෙන වෙනම සොයන්න.

14. (i) $\frac{d}{dx} \left[\ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| \right] = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $y(x+y)^2 = 3(x^3 - 5)$ නම් $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න.

(iii) $y = A \cos 2x + B \sin 2x$, නම් ද A හා B නියත ද වුව, $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0$ බව පෙන්වන්න.

15. (i) $\frac{2(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = A + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{2x-1}$ වන පරිදි A, B හා C නියත සොයන්න. වනසින්

$\int_1^2 \frac{2(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} dx = 2 + \ln(k)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වා k නියතය අගයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතා කරමින් $\int_1^3 x \ln|x| dx$ අගයන්න.

(iii) $u = 1 - x^2$ ආදේශයෙන් $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} dx$ අගයන්න.

16. (i) $\frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \tan \theta$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\sin x + \sqrt{3} \cos x$ යන්න $R \sin(x + \alpha)$ ආකාරයෙන් ලියන්න.

මෙහි $R > 0$, සහ $0 < \alpha < 90^\circ$ අතර වේ.

එනමින් $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$ විසඳන්න.

17. L_1 , සරල රේඛාව $4y + 3 = 2x$ වන අතර එය $A(P, 4)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි.

(a) P නියතයේ අගය සොයන්න.

L_2 සරල රේඛාව $C(2, 4)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන අතර L_1 ට ලම්භක වේ.

(b) L_2 රේඛාවේ සමීකරණය $ax + by + c = 0$ ආකාරයෙන් ලියන්න. මෙහි a , b හා c නිඛිල වේ. L_1 හා L_2 සරල රේඛා D හිදී ජේදනය වේ.

(c) D වල ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

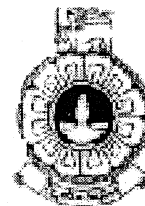
(d) CD රේඛාවේ දිග $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$AB = \sqrt{80}$ වන පරිදි B ලක්ෂ්‍යය L_1 මත පිහිටා ඇත. E ලක්ෂ්‍යය L_2 මත පිහිටා ඇත්තේ CDE රේඛාවේ දිග $= 3$ (CD රේඛාවේ දිග) වන සේය.

(e) $ACBE$ චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

නිමිකම් ඇවිරිණි.

The Open University of Sri Lanka
 Foundation course in Science
 Final Examination 2014/2015
 PAF 2201/PAE 2201 – Combined Mathematics I



Duration :- Three (3) Hours.

Date:- 19-11-2015

Time: 9.30a.m. –12.30p.m.

Answer All Questions

PART A

- (1) Find the values of x such that
 $\log_5(4-x) - 2\log_5(x) = 1$ where $0 < x < 4$
- (2) A circle C has centre (1,7) and passes through the point (0,0). Find an equation for C.
- (3) Find the set of values of x for such that
 (a) $4x - 5 > 15 - x$
 (b) $x(x - 4) > 12$
- (4) Given that $y = 9 - 4x - \frac{8}{x}$, find in their simplest form
 (a) $\frac{dy}{dx}$ (b) $\int y dx$
- (5) The equation $x^2 + 3px + p = 0$, where p is a non zero constant, has equal root.
 Find the value of p
- (6) Find the modulus and argument of complex number $(i+1)^3$
- (7) Evaluate $\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\theta + 2 \sin \theta}{\theta - 2 \sin \theta} \right)$
- (8) Find the term independent of x in the expansion of $\left(2x^2 + \frac{1}{3x} \right)^{12}$

(9) Express $\frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$ in the form $a+b\sqrt{5}$ where a and b are integers.

(10) Let $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ be a 2×2 matrix.

Show that $P^2 - 3P + 2I = 0$ where I is the 2×2 identity matrix and 0 is the 2×2 zero matrix.

PART B

Answer FIVE Questions only.

(11) (i) The equation $(k+3)x^2 + 6x + k = 5$ where k is constant, has two distinct real solutions for x

(a) Show that k satisfies $k^2 - 2k - 24 < 0$

(b) Hence find the set of possible values of k

(ii) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax + 18$ where a is constant

Given that $(x-3)$ is a factor of $f(x)$

(a) Show that $a = -9$

(b) Factorize $f(x)$ completely

(12) (i) Prove by Mathematical Induction

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \quad \text{where } n \in \mathbb{Z}^+$$

(ii) Prove that

$$r^2(r+1)^2 - r^2(r-1)^2 = 4r^3$$

$$\text{Hence Prove that } \sum_{r=1}^n r^3 = \left[\frac{n}{2}(n+1) \right]^2$$

Hence find the sum of $\sum_{r=1}^n (2r-1)(2r+1)(r)$

Is this series is convergent? Justify your answer.

(iii) Find the first four terms, in ascending powers of x , of the binomial expansion of $(2+3x)^5$ giving each term in its simplest form.

(13) (i) Show that, if $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ then $(A+B)^2 = A^2 + B^2$

(ii) Find the locus of the Complex number Z such that

i) $|Z+1|=5$ ii) $\arg(Z-1) = \frac{2\pi}{3}$

(14) (i) Show that $\frac{d}{dx} \left[\ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| \right] = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

(ii) Find $\frac{dy}{dx}$ for the with equation $y(x+y)^2 = 3(x^3 - 5)$

(iii) Given that $y = A \cos 2x + B \sin 2x$, where A and B are constants ,

Show that $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$

(15) (i) $\frac{2(4x^2 + 1)}{(2x+1)(2x-1)} = A + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{2x-1}$

Find the values of constants A , B and C

Hence show that the exact value of $\int_1^2 \frac{2(4x^2 + 1)}{(2x+1)(2x-1)} dx = 2 + \ln(k)$ giving the value of the constant k .

(ii) Use the Integration by parts to find the exact value of $\int_1^3 x \ln|x| dx$

(iii) Use the Substitution $u = 1 - x^2$ to find the exact value of $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} dx$

(16) (i) Prove that $\frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \tan \theta$

(ii) Show that you can express $\sin x + \sqrt{3} \cos x$ in the form $R \sin(x + \alpha)$ where $R > 0$, $0 < \alpha < 90^\circ$

Hence solve the equation $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$

(17) The line L_1 , has equation $4y + 3 = 2x$. The point $A(P, 4)$ lies on L_1

(a) Find the value of the constant P

The line L_2 passes through the point $C(2, 4)$ and is perpendicular to L_1

(b) Find an equation for L_2 , giving your answer in the form $ax + by + c = 0$ where a , b and c are integers.

The line L_1 and the line L_2 intersect at the point D .

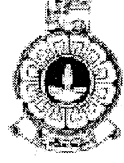
(c) Find the Co-ordinates of the point D

(d) Show that the length of CD is $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

A point B lies on L_1 and the length of $AB = \sqrt{80}$. The point E lies on L_2 such that
The length of the line $CDE = 3$ times the length of CD

(e) Find the area of the quadrilateral $ACBE$.

இலங்கை திறந்த பல்கலைக் கழகம்
விஞ்ஞானத்தில் அடிப்படைப் பாடநெறி
இறுதிப் பரீட்சை 2014/2015
PAF 2201/PAE 2201 – இணைந்த கணிதம் I



காலம்:- மூன்று (3) மணித்தியாலங்கள்.

திகதி : 19.11.2015

நேரம்: மு.ப 9.30 – பி.ப 12.30

எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை தருக

பகுதி A

- (1) $\log_5(4-x) - 2\log_5(x) = 1$ ஆயின் x இன் பெறுமானங்களை காண்க, இங்கு $0 < x < 4$
- (2) ஒரு வட்டம் C இனது மையம் (1,7) மற்றும் இவ்வட்டமானது புள்ளி (0,0) இற்கு ஊடாகவும் செல்லுமாயின். C இனது சமன்பாட்டைக் காண்க.
- (3) (a) $4x - 5 > 15 - x$
(b) $x(x-4) > 12$ ஆயின் x இன் பெறுமானங்களின் தொடையை காண்க
- (4) $y = 9 - 4x - \frac{8}{x}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது, பின்வருவனவற்றை எளிய வடிவில் காண்க
(a) $\frac{dy}{dx}$ (b) $\int y dx$
- (5) சமன்பாடு $x^2 + 3px + p = 0$ ஆனது சமனான மூலங்களையுடையது, இங்கு p பூச்சியமல்லாத ஒரு மாறலியாகும். p இன் பெறுமானம் காண்க.
- (6) $(i+1)^3$ என்னும் சிக்கல் எண்ணின் மட்டு மற்றும் வீசலைக் காண்க
- (7) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\theta + 2\sin \theta}{\theta - 2\sin \theta} \right)$ இன் பெறுமானம் காண்க
- (8) $\left(2x^2 + \frac{1}{3x} \right)^{12}$ இன் விரிவில் x ஐ சாராத உறுப்பைக் காண்க

(9) a மற்றும் b ஆகியன முழு எண்களாயின் $\frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$ என்பதை $a+b\sqrt{5}$ எனும் வடிவில் கூறுக.

(10) $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ஒரு 2×2 தாயம் என்க.

$P^2 - 3P + 2I = 0$ எனக் காட்டுக, இங்கு I ஆனது 2×2 சர்வசமன்பாட்டு தாயம் மற்றும் 0 ஆனது 2×2 பூச்சிய தாயம் ஆகும்.

பகுதி B

ஐந்து வினாக்களுக்கு மட்டும் விடை தருக.

(11) (i) சமன்பாடு $(k+3)x^2 + 6x + k = 5$ ஆனது x இற்கு இரு வேறுபட்ட மெய் தீர்வுகளை

கொண்டிருக்கின்றது, இங்கு k ஆனது மாறிலியாகும்

(a) k ஆனது $k^2 - 2k - 24 < 0$ ஐ திருப்தி செய்யும் எனக் காட்டுக

(b) இதிலிருந்து k இற்கு சாத்தியமான பெறுமானங்களின் தொடையை காண்க

(ii) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax + 18$ ஆகும், இங்கு a ஆனது மாறிலியாகும்.

$(x-3)$ ஆனது $f(x)$ இன் காரணியாகும்

(a) $a = -9$ எனக் காட்டுக

(b) $f(x)$ ஐ முழுமையாக காரணிப்படுத்துக

(12) (i) கணித தொகுத்தறிவு முறையை பயன்படுத்தி நிறுவுக

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \quad \text{இங்கு } n \in \mathbb{Z}^+$$

(ii) $r^2(r+1)^2 - r^2(r-1)^2 = 4r^3$ என நிறுவுக

$$\text{இதிலிருந்து } \sum_{r=1}^n r^3 = \left[\frac{n}{2}(n+1) \right]^2 \text{ என நிறுவுக}$$

$$\text{இதிலிருந்து } \sum_{r=1}^n (2r-1)(2r+1)(r) \text{ இன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க}$$

இது ஒருங்கும் தொடரா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(iii) $(2+3x)^5$ இன் ஈடுறுப்பு விரிவில் x இன் வலுக்களின் ஏறுவரிசையில் ஒவ்வொரு

உறுப்புக்களினதும் எளிய வடிவில் முதல் நான்கு உறுப்புக்களைக் காண்க

(13) (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ ஆயின் $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ எனக் காட்டுக

(ii) $|Z+1| = 5$ ii) $\arg(Z-1) = \frac{2\pi}{3}$

ஆகுமாறு சிக்கல் எண் Z இன் ஒழுக்கை காண்க

(14) (i) $\frac{d}{dx} \left[\ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| \right] = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ எனக் காட்டுக

(ii) சமன்பாடு $y(x+y)^2 = 3(x^3 - 5)$ இன் $\frac{dy}{dx}$ காண்க

(iii) $y = A \cos 2x + B \sin 2x$ ஆகும், இங்கு A மற்றும் B ஆகியன மாறிலியாகும்,

$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ எனக் காட்டுக

(15) (i) $\frac{2(4x^2 + 1)}{(2x+1)(2x-1)} = A + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{2x-1}$

மாறிலிகள் A, B மற்றும் C ஆகியவற்றின் பெறுமானம் காண்க

இதிலிருந்து $\int_1^2 \frac{2(4x^2 + 1)}{(2x+1)(2x-1)} dx = 2 + \ln(k)$ ஆனது செப்பமான பெறுமானம் எனக் காட்டுக

மாறிலி k இன் பெறுமானம் காண்க.

(ii) பகுதிகளாக தொகையிடுதல் மூலம் $\int_1^3 x \ln|x| dx$ இன் செப்பமான பெறுமானம் காண்க

(iii) பிரதியீடு $u = 1 - x^2$ இனை உபயோகித்து $\int_0^{1/2} \frac{x^2}{(1-x^2)^{1/2}} dx$ இன் செப்பமான பெறுமானம் காண்க

(16) (i) $\frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \tan \theta$ என நிறுவுக

(ii) $\sin x + \sqrt{3} \cos x$ இனை $R \sin(x + \alpha)$ எனும் வடிவில் கூறலாம் எனக் காட்டுக இங்கு $R > 0$,

$0 < \alpha < 90^\circ$ ஆகும்

இதிலிருந்து சமன்பாடு $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$ இனை தீர்க்குக

(17) கோடு L_1 இன் சமன்பாடு $4y + 3 = 2x$ ஆகும். புள்ளி $A(P, 4)$ ஆனது L_1 இல் இருக்கிறது

(a) மாறிலி P இன் பெறுமானம் காண்க.

கோடு L_2 ஆனது L_1 இற்கு செங்குத்தாகவும் மற்றும் புள்ளி $C(2, 4)$ இற்கு ஊடாகவும் செல்கிறது

(b) L_2 இனது சமன்பாட்டைக் காண்க, உமது விடையை $ax + by + c = 0$ எனும் வடிவில் கூறுக இங்கு a, b மற்றும் c ஆகியன முழு எண்களாகும்.

கோடு L_1 மற்றும் கோடு L_2 ஆகியன புள்ளி D இல் இடைவெட்டுகின்றன.

(c) புள்ளி D இன் ஆள் கூறுகளைக் காண்க

(d) CD இன் நீளம் $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ எனக் காட்டுக

ஒரு புள்ளி B ஆனது L_1 இல் இருக்கிறது மற்றும் நீளம் $AB = \sqrt{80}$. புள்ளி E ஆனது L_2 இல் இருக்கிறது அதாவது கோடு CDE இன் நீளம் = 3 மடங்கு CD இன் நீளம்

(e) நாற்பக்கல் $ACBE$ இன் பரப்பைக் காண்க.