

வினாக்கள் தீர்வுகள் பலகலைக்கழகம்

தொழில்நுட்பவியல் டிப்ளோமா - அடியவை மட்டம் 2

கிறதியாண்டுகள் - 2008

MPZ 2230 - கணிதம் - பகுதி II

காலம் - 3 மணித்தியாலம்.



056

தேதி: 16.03.2009

நேரம்: 9.30-12.30

ஆறு வினாக்களில் மட்டும் விடையளிக்க. தேர்வுகள் இவ்வகையில் பரந்திருப்பதும், சாதாரணமாகவே கணிதவியலானது பயன்படுத்தப்படும்.

01. முக்கோணம் PQR இல் உச்சங்கள் Q, R ஆகியவை கோடு $3x - 4y = 0$ இல் y அச்சமும் மூன்றாவது கிடைக்கின்றன. பக்கம் QR ஆகியவை பரந்திருக்கின்றன λ கிணையும் $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ இடத்தில் உள்ளது.

(i) λ உறுப்புகளால் Q, R ஆகியவை ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(ii) $OQ = \frac{10(1-\lambda)}{3(3-4\lambda)}$ அத்துடன் $OR = \frac{2(1-\lambda)}{3}$ என்கையால்

கிடைக்கின்ற 0 உறுப்புகள்.

(iii) PQR ஆகியவை ஒரு சாய்க்கும் எனின், λ கிடைக்கின்ற சாய்க்கும் மூன்று மூன்றுகளைக் காண்க. அத்துடன் P கிணையும் ஆள்கூறையும் காண்க.

02. $S_1 = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$

$S_2 = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ எனின் மூன்று மூன்றுகளைக் காண்க.

தொடுவதற்கான சமன்பாடுகளைக் காண்க.

அவை தொடர்பில் தொகுப்பினியானது மிகவும் சிறியதாக

கொடுக்கவும் கிடைக்கும் என இருக்க.

$$2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + c_1 - c_2 = 0$$

$$(f_1 - f_2)x - (g_1 - g_2)y + f_1g_2 - f_2g_1 = 0$$

வட்டங்கள் $S_1 = x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, $S_2 = x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$

ஒன்றையொன்று வெளியிறமாக தொடும் ஊக்காட்கள்.
கிடைக்காத தொடும் தொடுபுள்ளி A க்கு ஆள்கூறுகள் காண்க.

p என்ன புள்ளியில் கிடைக்கும் முதலாவது வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடலையின் தீர்மானம் p கிடைக்கும் கிடைக்கும் வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடலையின் தீர்மானம் λ (ஒரு மாறிலி) மடங்காக இருக்கிறது. $\lambda^2 \neq 1$ எனில் p கிடைக்கும் ஒருங்குணம் A கிடைக்கும் செல்லும் ஒரு வட்டம் என நிறுவுக. அதன் ஆள்கூறுகள் λ உறுப்புகளால் அதன் சமன்பாட்டை காண்க.

03. பரவளைய $y^2 = 4ax$ க்கு புள்ளி $p(at^2, 2at)$ க்கு வரையப்படும் செவ்வண்ணின் சமன்பாட்டை காண்க.

புள்ளி p க்கு உள்ள செவ்வண்ணானது பரவளையைய புள்ளி $Q[4t^2, 2at]$ க்கு மீண்டும் சந்திக்கின்றது.

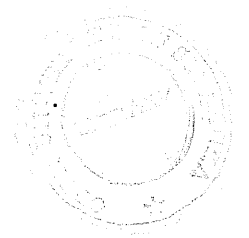
$t^2 + tT + 2 = 0$ ஊக்காட்கள் $T^2 \geq 8$ என்பதை உல்தீர்க்க.

கோடு $3y = 2x + 4a$ க்கு பரவளையைய H, K க்கு சந்திக்கின்றது. புள்ளிகள் H, K க்கு செவ்வண்ணானது பரவளையைய சந்திக்கின்றது ஊக்காட்கள்.

04. தீர்வளையம் $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ க்கு $P_1 \equiv (a \cos \alpha, b \sin \alpha)$,

$P_2 \equiv (a \sin \alpha, b \cos \alpha)$ என்பன வெவ்வேறான புள்ளிகள் ஆகும். நான் $P_1 P_2$ க்கு சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வளையம் $S = 0$ க்கு புள்ளி $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ க்கு தொடலையின் சமன்பாட்டை எழுதுக.



$S=0$ க்கு P_1, P_2 க்குள் உரையிப்பும் ருதாடலகர் புள்ளு
 T க்குள் கிடலவடருகின்றுண் ஁க. T க்குள் க்குள்ருகணக
 கணக. புள்ளு T க்குள்ருக $by - ax = 0$ ஁பதால்
 தரயிபும் ஁பத உய்த்து.

05. ருதிகுண அபரவணய $xy = c^2$ க்குள் புள்ளு $P = (CP, c/p)$
 க்குள் உரையிப்பும் ருதால $x + p^2y = 2CP$ ஁ககாடருக. அப
 ரவணய $xy = c^2$ க்குள் புள்ளு $P = (CP, c/p)$ க்குள்
 உரையிபட ருதாலயாணது x அக்கிண புள்ளு Q க்குள்
 சத்திகின்று. அத்துடன் y அக்கின்று சமாத்தரமாக புள்ளு Q
 க்குள்ருக ருதலயும் கருடாணது அபரவணயயை புள்ளு R
 க்குள் சத்திகின்று. x அக்கின்று சமாத்தரமாக புள்ளு P க்குள்ருக
 ருதலயும் கருடாணது y அக்கிண புள்ளு S க்குள் சத்திகின்று.

அபரவணயயான்று புள்ளு R க்குள் கரு RS க்குள்ருக ருதால
 யாக க்குள்ருக ஁ககாடருக.

புள்ளுகள் P, R க்குள் அபரவணயயான்று உரையிப்பும் ருதாலகர்
 புள்ளு T க்குள் கிடலவடருகின்றுண். புள்ளு T க்குள் க்குள்ருக
 கணககணக. அபரவணயயால் P மாரும் யுருது T க்குள்
 க்குள்ருக ருதிகுண அபரவணய ஁ககாடருக.

06. (a) $f(\theta) = \frac{1}{5 \cos \theta + 3 \cos(\theta + \pi/3) + 8}$

(i) $\frac{1}{15} \leq f(\theta) \leq 1$ ஁ககாடருக.

(ii) $9 f(\theta) = 2$ ஁ககாடருக சமயாடடைத் தீர்க்க.

(b) $\sec^2(\tan^{-1} 2) + \operatorname{cosec}^2(\tan^{-1} 3) = 55/9$ ஁ககாடருக.

(c) $|x| < \sqrt{2}$ க்குள் $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1} 8/3$ ஁ககாடருக
 சமயாடடைத் தீர்க்க.

07. (a) முக்கோணி ஒன்றில் அதன் மிகப்பெரிய கோணமானது மக்சிமம் கோணத்தின் ஒரு மடங்காகவும் மிகப்பெரிய பக்கமானது மக்சிமம் பக்கத்தின் நீளத்தின் $1/2$ மடங்காகவும் உள்ளது. முக்கோணியனுடைய மக்சிமம் கோணமானது $\cos^{-1}(3/4)$ எனக் காட்டுக. மீதமுள்ள பக்கத்தின் நீளம் 10 cm எனக் தரப்பட்டிருப்பின் மற்றைய இருபக்கங்களானதும் நீளத்தைக் காண்க.

(b) முக்கோணி ஒன்றிற்கான சைன் விதியைப் பயன்படுத்தி வட்டமையான சூழிய்களுடன் முக்கோணி ABC க்கு
 $(a+b+c) \left[\tan A/2 + \tan B/2 \right] = 2c \cot C/2$ என நிறுவுக.

அதிலுடனேயே அல்லது வேறுவிதமாக

$$\frac{a+b-c}{a+b+c} = \tan A/2 \cdot \tan B/2 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

08. சிக்கலி என Z_0 ஆனது பின்வருமாறு தரப்படுகிறது.

$$Z_0 = \frac{3+j}{2-j}$$

(a) Z_0 இனை $a + bj$ எனவும் வடிவில் எழுதுக. இங்கு $a, b \in \mathbb{R}$

(b) Z_0 இனுடைய மட்டு, உச்சத்தினை காண்க.

(c) சிக்கலி என Z_0 இனை பிரதிநிதித்துவம் படுத்தும் புள்ளியை அதன் வாய்ப்புடத்தில் குறித்துக் காட்டுக. அதே வரைபடத்தில் சிக்கலி என Z ஆகிறது $|Z - Z_0| = 1$ இனை பிரதிநிதித்துவம் படுத்தும் புள்ளியை ஒழுக்கை வரைக.

வரைபடத்தை பயன்படுத்தி $|Z|$ இன் அதிகபட்சமானது யாவது என்பதை அதன் ஒழுக்கில் உள்ள புள்ளிகளிலிருந்து காண்க.

II. சமன்பாடு $2x^3 + x^2 + 25 = 0$ ஆனது ஒரு மெய்மூலத்தையும் ஒரு சிக்கல் மூலத்தையும் கொண்டுள்ளது.

(a) $1+2j$ என்பது சிக்கல் மூலங்களில் ஒன்று என்பதை உறுதிப்படுத்துக.

(b) சமன்பாட்டின் இன்னொரு சிக்கல் மூலத்தையும் எழுதுக. சமன்பாட்டின் மெய்மூலத்தைக் காண்க.

(c) சிக்கல் எண் $1+2j$ இணை விரிபலக்டம் புள்ளியைக் கண்டு உறுதிப்படுத்தி உரைக்க.

அதே உரைபடத்தில் சிக்கலெண் Z ஆனது $|Z| = |Z-1-2j|$ எனும் தொடர்பை நிறுதிப்படுத்தும் உகையல் விரிபலக்டம் புள்ளியைக் குறிக்கக் காட்டுக.

09. எல்லா θ மீ குறு எண்களாகும் சூட்டுகளைக் குறித்ததைக் கூறுக.

(i) மெய்யுள்ள குறித்ததை பயன்படுத்தி

$$[1+j \tan \theta]^n + [1-j \tan \theta]^n = \frac{2 \cos n\theta}{\cos^n \theta} \quad \text{எனக்}$$

காட்டுக. அங்கு $n \in \mathbb{Z}^+$ அத்துடன் $\cos \theta \neq 0$.

பயன்பாட்டை விடையாணை உபயோகித்து $(1+z)^4 + (1-z)^4 = 0$

எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\pm j \tan \pi/8$, $\pm j \tan 3\pi/8$

எனக்காட்டுக.

அதிலுள்ள $\tan^2 \pi/8 = 3 - 2\sqrt{2}$ எனக்காட்டுக.

(ii) $(1-\sqrt{3}j)^4 (1+j)^3$ இணைத் துணிக்கை.



10. (a) அமல், பண்டு, சமல் என்கிற மூன்று நண்பர்கள் சிறை அரங்கில்தான்
 ன்லி சரீதியிதற்கு அணங்குகினிற்றாரிகள். அமலிற்கு அவர்கள்
 சரீதிக்கவுரினா அரங்கி நிகலா அலிலது சலையாயா ண்பது
 ண்பகப்பருத்த முடியாதிருத்தது. அதனால் அரங்கிற்கு போவதற்கு
 ண்ணயம் ண்ணைய சண்டியப்பார்க்க முடியுதெய்யப்பட்டது.

பண்டுவுமீ ண்ணயம் ண்ணைய சண்டியப்பார்க்கு சலையாங்கா
 அலிலது மலெலலீநக்சிடலககா ண்பதை தீர்மானித்தார்.

அலெலலீ சமலும் ண்ணயம் ண்ணிறண சண்டியப்
 பார்க்கு நிகலாங்கு போவதா கிலலையா ண்பதை தீர்மானித்து
 பின்பு அறுதியாக மீண்டும் ண்ணயம் ண்ணைய சண்டி
 சலையாங்கா அலிலது மலெலலீநக்சிடலககா ண்பதை தீர்மானி
 த்தார்.

அதற்கான மரவாய்ப்படம் ண்ணிறண உரைக.

பின்புருவணவற்றிற்கு திகழ்ககவுகணை காண்க.

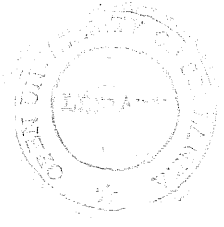
- (i) அமலும் பண்டுவுமீ சரீதியிதற்கு
- (ii) பண்டுவுமீ சமலும் சரீதியிதற்கு
- (iii) அமல், பண்டு, சமல் ஆகிய மூவரும் சரீதியிதற்கு
- (iv) அமல், பண்டு, சமல் ஆகிய மூவரும் வித்தியாசமான
 அரங்குகணங்கு போவதற்கு
- (v) ஆககிணறற்கு அருவராவது சரீதியிதற்கு

(b) மாதிரிவண ண்ணிறல மூன்று திகழ்ககவுகள் X, Y, Z ண்பண
 உரைவருகிதப்பருகினிற்றண. திகழ்ககவுகள் X உமீ Y உமீ தமீகூள்
 புறதீவிடம் திகழ்ககவுகள் ஆகும். அத்துடன் திகழ்ககவுகள் X உமீ
 Y உமீ சாராதலையாடும்.

$P(X) = \frac{1}{3}$, $P(Z) = \frac{1}{5}$, $P(X \cup Y) = \frac{2}{3}$ ண்கு
 தரப்பிடலால்

$P(X \cup Z)$, $P(Y)$, $P(X \cap Y)$ ண்பவற்றைய காண்க.

$P(Y \cup Z) = \frac{3}{5}$ ண்கு தரப்பிடலுபிண திகழ்ககவுகள் Y உமீ
 Z உமீ சாராதலையா கிலலையா ண்பதை தீர்மானிக்க.



ii. ஒரு ரயர் உற்பத்தியாளர் குறிப்பிடல ஒரு வகை ரயர் கம்பனை ஒன்றை தீட்டுகின்றார். 100 ரயர் மாதிருகி சோதனை ஒன்றிற்கு உட்படுத்தப்படும் ரயர் ஒன்றிலுடைய தியாயமான எலகையை அடைவதற்கு முன்பாக அதனால் பயணிக்கப்பட்ட தாரத்தினை அட்டவண்ண கால்குகின்றது.

தாரம் / 1000 km	ரயர்களின் எண்ணிக்கை
0 - 15	6
15 - 25	16
25 - 35	34
35 - 45	26
45 - 55	14
55 - 65	4

பின்வருவனவற்றை காண்க.

- (i) தாரத்திலுடைய சுகாரம்
- (ii) தாரத்திலுடைய இடையம்
- (iii) தாரத்திலுடைய இடை
- (iv) தாரத்திலுடைய தியாயமனைகல்

12. (a) மையம் O இனையும் சூரை a இனையும் உடைய தினை யான ஒப்பமான தினைம கோணம் ஒன்றின் மெழ்பரப்பில் புள்ளி P இல் n தினைவுடைய ஒரு துண்கிதை ஒன்று மிடிக்கப்பட்ட ஂளது. OP குணது $\cos^{-1} \frac{3}{4}$ ஂன்று துண்கிதைகளை தினைக்கீதீதுடன் மெல்டீராகீதி அமைக்கீதமற்று துண்கிதைகயானது அடப்படுகிறது. துண்கிதைகயானது அதாவது OA, தினைக்கீதீது மெல்டீராகீதி O கோணம் சீகீதம் யோது துண்கிதைகயான வேகம் v குணது

$$v^2 = \frac{1}{2} g a (3 - 4 \cos \theta)$$
 ஂன்பதால் தரப்பட்ட ஂன தினைவுக. கோணத்தின் மெழ்பரப்பிலேயே அன்றும் துண்கிதை கிடுக்கின்று ஂன தரப்பட்டால் அடிபீரத்தல் துண்கிதை யானீது ஂள்ள ஂசுத்தீது மறுதாக்கீதை காண்க.

OA சூனது திணைக்கீழ்து மேல்பொக்கி தொணம் $\frac{\pi}{3}$ ஆங்கும்பொது துண்கீகையானது மேற்பரப்பில் கிடுகீது விடுபடம் எண்பதை உய்த்தறித.

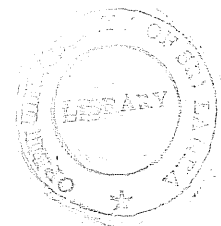
(b) கியந்தை தீளம் 1 m கிணை உடைய தீடையுடையம் கிணை ஒன்றின் ஒரு கிணையுடன் 2 kg திணையுடைய துண்கீகை ஒன்று கிணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அதனது மறுகிணையானது ஒப்பமான கிடைத்தளத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி A க்கு கிணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. துண்கீகையானது தளத்திற்கு குறுக்காக புள்ளி C உரைக்கும் கிடுக்கிப்படுகிறது. கிடுகு $AC = 1.5 \text{ cm}$. மிஸ்யு C கில் ஒய்கில கிடுகு விடப்படுகிறது. B சூனது AC கிண்கிமல் உள்ள ஒரு புள்ளி ஆகும். $AB = 1 \text{ m}$, கிணையுடைய மீள்தன்மை மட்டு 10 N எண்கள்

i) B கிணை மையமாக்கிக்கொண்டு துண்கீகையானது C கிலகிடுகு B உரைக்கும் எணமை கிணை கியக்கீதை ஒன்றும் எண்க் கால்டுக.

ii) C கிலகிடுகு B கிடுகு செலி எண்கீகும் பெரம் $\frac{\pi\sqrt{5}}{10} \text{ sec}$ எண்க் கால்டுக.

iii) B கில் அதனது வேகம் $\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ms}^{-1}$ எண்க் கால்டுக.

iv) துண்கீகையானது மாறுவேகத்துடன் $\frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ sec}$ கிடுகு மிஸ்யு பயணக்கீகும் எண கால்டுக.



- மதியுமமை உடையது -