00339

ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය

ඉංජිනේරු තාක්ෂණ ඩිප්ලෝමා (පදනම්) පාඨමාලාව - මට්ටම 02

අවසාන පරීක්ෂණය 2011/2012

ශුද්ධ ගණිතය - **MPZ 2310 – II**

කාලය - පැය 03 යි.

දිනය - 2012. 04.05 වේලාව - පෙ.ව. 09.30 - 12.30 දක්වා

ප්‍රශ්න 06 කට පිළිතුරු සපයන්න.

Non programmable ගණක යන්ත්‍ර භාවිතා කළ හැක. ගණක යන්ත්‍ර සඳහා ජංගම දුරකථන භාවිතා කිරීමට ඉඩ දෙනු නොලැබේ.

01. a) $4x^2+y^2=73$ සහ $xy=12$ $x>y>0$

$(2x+y)^2$ සහ $(2x-y)^2$ සඳහා අගයන් සොයන්න. එනයින් x හා y සඳහා අගයන් සොයන්න.

b) $f(x)=2x^2+4(\lambda-1)x+(\lambda^2+1)$ යැයි සිතමු.

i. $f(x)$, x හි සියලුම තාත්වික අගයන්ට ධනවීම පිණිස λ හි අගයන් සොයන්න.

ii. $f(x)=0$ හි මූල α, β නම් α, β තාත්වික වීම පිණිස λ හි අගයන් සොයන්න.

c) i. p,q,r,x,y හා z ධන සංඛ්‍යා විට $p^x=q^y=r^z$ සහ $q^2=pr$ නම් $y=\frac{2xz}{x+z}$ බව පෙන්වන්න.

ii. a, b, c ශුන්‍ය නොවන අනුයාත නිඛිල 3 කි. $2\log b=\log(1+ac)$ බව පෙන්වන්න.

02. a) ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයෙන්, n ඕනෑම ධන නිඛිලයක් සඳහා

$1+4+7+\ldots\ldots\ldots\ldots+(3n-2)=\frac{n}{2}(3n-1)$ බව සාධනය කරන්න.

b) $\frac{1}{r(r+1)}=\frac{A}{r}+\frac{B}{(r+1)}$, $r=1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots$ වන සේ A හා B සොයන්න. එනයින් $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)}$ සොයන්න.

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{2n(2n+1)}=\frac{n}{(n+1)(2n+1)}$$ බව

පෙන්වන්න.

c) $|x^2-4|>|5x-8|$ අසමානතාව තෘප්ත කරන x සොයන්න.

03. a) i. ENGINEERING TECHNOLOGY යන වචනවල වරකට සියළුම අකුරු ගෙන කළ හැකි පිලියෙළ කිරීම් ගණන සොයන්න.

ii. ENGINEERING TECHNOLOGY යන වචනවල වරකට 4 බැගින් වූ සංයෝජන ගණන සොයන්න.

b) $(1+x)^n$ හි ප්‍රසාරණයේ අනුයාත පද තුනක සංගුණක පිළිවෙලින් 36,84 හා 126 වේ. n හි අගය සොයන්න.

c) සාධක ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් $f(x)=4x^4+5x^3-10x^2-5x+6$ හි සාධක සොයන්න.

04. a) $\frac{(1+j)x-2j}{3+j}+\frac{(2-3j)y+j}{3-j}=j$ වන පරිදි x හා y හි තාත්වික අගයන් සොයන්න.

b) z_1 , z_2 අසමාන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවල $|z_2|=1$ වේ. $\left|\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|=1$ වන බව පෙන්වන්න. [ඉඟිය $z_1=x+jy$ හා $z_2=Cos\theta+jSin\theta$ ලෙස ගන්න.]

c) $x+j\sqrt{x^4+x^2+1}$ හි වර්ග මූල සොයන්න.

[ඉඟිය $\{x+j\sqrt{x^4+x^2+1}\}^{\frac{1}{2}}=p+jq$ ලෙස ගන්න.]

d) මේ සමීකරණ පද්ධතිය විසඳන්න.

$$x+y+z=8$$
$$3x-2y+z=12$$
$$y-x=-3$$

05. a) සමාන්තරාශ්‍රයක බද්ධ පාද දෙකක සමීකරණ $4x+5y=0$ සහ $7x+2y=0$ වේ. සමාන්තරාශ්‍රයේ විකර්ණයක සමීකරණය $11x+7y-9=0$ වේ. අනෙක් පාද දෙකේත්, ඉතිරි විකර්ණයේත් සමීකරණ සොයන්න.

b) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\ ,\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=2$ මගින් නිරූපණය කරන පාද සහිත සමාන්තරාශ්‍රය රොම්බසයක් බව පෙන්වන්න.

06. වෘත්තයක් පිළිවෙලින් $(3,0),(0,\sqrt{3})(0,-\sqrt{3})$ ඛණ්ඩාංක සහිත P,Q, R ලක්ෂ්‍ය හරහා යයි.

i. වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

ii. වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක හා අරය සොයන්න.

iii. QR සුළු චාපයේ දිග සොයන්න.

iv. විචල්‍ය m අනුක්‍රමය සහිත $y=mx+3$ රේඛාව PQR වෘත්තයට ජ්‍යායක් වේ. මෙම ජ්‍යාය වෘත්තයට L හා M හිදී හමුවේ. LM හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ පථය සොයන්න.

07. a) පහත සීමා අගයන්න.

i. $\underset{\theta\to\pi/2}{\text{සී}}\ \frac{\sin\theta-1}{\cos^2\theta}$

ii. $\underset{x\to\pi/4}{\text{සී}}\ \frac{\sec^2x-2}{\tan x-1}$

iii. $\underset{n\to\infty}{\text{සී}}\ \frac{3^n+2^n}{3^n-2^n}$

b) x විෂයයෙන් $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ අවකලනය කරන්න.

$y=\sin(\sin x)$ නම් $\frac{d^2y}{dx^2}+\tan x\frac{dy}{dx}+y\cos^2x=0$ බව පෙන්වන්න.

c) එන්ජිමක් කාර්ය කිරීමේ සීඝ්‍රතාව f (v), $f(v)=15v+\frac{6000}{v};0<v<30$ යන්නෙන් දෙනු ලැබේ. v යනු එන්ජිමේ වේගය වේ. එන්ජිම කාර්ය කිරීමේ සීඝ්‍රතාව අඩුතම වනසේ එන්ජිමට තිබෙන වේගය සොයන්න.

00339

08. a) පහත අනුකලන සොයන්න.

i. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ ii. $\int \frac{dx}{Sinx+Cosx}$ iii. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$

b) පහත නිශ්චිත අනුකලවල අගය සොයන්න.

i. $\int_1^2 \frac{3xdx}{(x-1)(x+2)}$ ii. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4\cos x-3\sin x}$

c) $y=16-x^2$ වක්‍රය x අක්ෂය සමඟ පර්යන්ත ගත වන වර්ගඵලය සොයන්න.

09. a) i. $\frac{Sin2\theta+Sin\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}=Tan\theta$

ii. $Sec^2\theta(1+Sec2\theta)=2\sec 2\theta$ බව පෙන්වන්න.

b) මේ සමීකරණ විසඳන්න.

i. $Cosx+Cos3x=Sin4x+Sin2x$

ii. $Sinx-Cosx=1$

c) සම්මත අංකනය භාවිතයෙන් , ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා

$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{Sin(A-B)}{Sin(A+B)}$ බව පෙන්වන්න.

- හිමිකම් ඇවිරිණි. -

00339

THE OPEN UNIVERSITY OF SRI LANKA
DIPLOMA IN TECHNOLOGY – (FOUNDATION PROGRAMME)
FINAL EXAMINATION – 2011/2012
MPZ 2310 – PURE MATHEMATICS - II
DURATION – THREE (03) HOURS

DATE : 05th April 2012 **TIME: 9.30 – 12.30 hrs**

Answer six (06) questions only. You can use non programmable calculators.

01. a) $4x^2 + y^2 = 73$ and $xy = 12$ $x > y > 0$

Find the values for $(2x+y)^2$ and $(2x-y)^2$. Hence find the values for x and y.

b) Let $f(x) = 2x^2 + 4(\lambda - 1)x + (\lambda^2 + 1)$

i. Find the values of λ such that $f(x)$ is positive for all real value of x.

ii. α, β are the roots of the equation $f(x) = 0$. Find the set of values of λ such that α and β are real.

c) i. If p, q, r, x, y and z are positive numbers such that $p^x = q^y = r^z$ and $q^2 = pr$, prove that $y = \dfrac{2xz}{x+z}$.

ii. If a, b and c are any three consecutive non negative integers, prove that $2\log b = \log(1 + ac)$.

02. a) Using the principle of mathematical induction, show that for each positive integer n,

$$1 + 4 + 7 + \dots\dots + (3n-2) = \frac{n}{2}(3n-1).$$

b) Find constants A and B such that $\dfrac{1}{r(r+1)} = \dfrac{A}{r} + \dfrac{B}{(r+1)}$ for $r = 1, 2, \dots\dots$

Hence find $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)}$ and deduce that

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots\dots + \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{n}{(n+1)(2n+1)}$$

c) Find the solution of the inequality of $|x^2 - 4| > |5x - 8|$

03. a) i. How many arrangements can be formed out of the letters of the words ENGINEERING TECHNOLOGY be arranged when all are taken at a time.

ii. Find the number of combinations that can be made from the letters of the words ENGINEERING TECHNOLOGY taking four at a time.

b) Three consecutive coefficients of the binomial expansion of $(1+x)^n$ are 36,84 and 126 respectively. Find the value of n.

c) Use the factor theorem to find the factors of the polynomial $f(x)=4x^4+5x^3-10x^2-5x+6$.

04. a) Find the real values of x and y so that $\frac{(1+j)x-2j}{3+j}+\frac{(2-3j)y+j}{3-j}=j$

b) If z_1 and z_2 are different complex numbers with $|z_2|=1$, then show that $\left|\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|=1$ [Hint : Assume $z_1=x+jy$ and $z_2=Cos\theta+jSin\theta$]

c) Find the square roots of $x+j\sqrt{x^4+x^2+1}$

[Hint: take $\{x+j\sqrt{x^4+x^2+1}\}^{\frac{1}{2}}=p+jq$]

d) Solve the following system equations.

$x+y+z=8$

$3x-2y+z=12$

$y-x=-3$

05. a) Two consecutive sides of a parallelogram are $4x+5y=0$ and $7x+2y=0$. If the equation to one diagonal is $11x+7y-9=0$. Find the equations of the other two sides and the other diagonal.

b) Prove that the parallelogram formed by the lines $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=2$ is a rhombus.

06. A circle passes through the points P,Q, R which have the coordinates $(3,0)$, $(0,\sqrt{3})(0,-\sqrt{3})$ respectively.

i. Find the equation of the circle.

ii. Find the coordinates of the centre and radius of the circle.

iii. Find the length of minor arc QR

iv. A line $y = mx+3$ of variable gradient m, cuts the circle PQR in two points L and M. Find the locus of the mid point of LM.

07. a) Evaluate the following limits;

i. $\lim_{\theta \to \pi/2} \frac{Sin\theta - 1}{Cos^2\theta}$ ii. $\lim_{x \to \pi/4} \frac{Sec^2x - 2}{Tanx - 1}$

iii. $\lim_{n \to \infty} \frac{3^n + 2^n}{3^n - 2^n}$

b) Differentiate $\frac{Sinx + Cosx}{Sinx - Cosx}$ with respect to x. If $y = Sin(\sin x)$ Show that $\frac{d^2y}{dx^2} + Tanx\frac{dy}{dx} + yCos^2x = 0$.

c) The rate of working of an engine is given by $f(\upsilon) = 15\upsilon + \frac{6000}{\upsilon}; 0 < \upsilon < 30$ where υ is the speed of the engine. Determine the value of υ for which the rate of working is least.

08. a) Evaluate the following integrals

i. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$ ii. $\int \frac{dx}{Sinx + Cosx}$ iii. $\int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx$

b) Evaluate the following define integrals.

i. $\int_1^2 \frac{3x\,dx}{(x-1)(x+2)}$ ii. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x}$

c) Find the area bounded by the curve $y = 16 - x^2$ and x *axis*.

09. a) Prove that

i. $$\frac{Sin2\theta + Sin\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta} = Tan\theta$$

ii. $$Sec^2\theta(1+Sec2\theta) = 2\sec 2\theta$$

b) Solve the equation.

i. $Cosx + Cos3x = Sin4x + Sin2x$

ii. $Sinx - Cosx = 1$

c) By using the general notation.

Show that $\frac{a^2-b^2}{c^2} = \frac{Sin(A-B)}{Sin(A+B)}$. for ABC Triangle.

- Copyrights reserved -

00111

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
தொழில்நுட்பவியல் டிப்ளோமா - (அடிப்படை மட்டம்)
இறுதிப் பரீட்சை - 2011/2012
MPZ 2310 - தூயகணிதம் - II
காலம் - மூன்று (03) மணித்தியாலங்கள்

திகதி : 05 சித்திரை 2012 — நேரம் : 9.30 - 12.30

ஆறு (06) வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்க.
நிங்கள் புரோகிராம் பண்ணாத கணிப்பான்களை பாவிக்க முடியும்.

01 (a) $4x^2+y^2=73$, $xy=12$, $x>y>0$ எனின், $(2x+y)^2$, $(2x-y)^2$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. இதிலிருந்து x, y இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(b) $f(x) = 2x^2+4(\lambda-1)x+(\lambda^2+1)$ ஆயின்,

(i) x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானத்திற்கும் $f(x)$ அனது நேராக இருப்பின் λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) $f(x)=0$ இன் மூலங்கள் α, β ஆயின், λ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. இங்கு α, β என்பன மெய்யாகும்.

(c) (i) p, q, r, x, y, z என்பன நேர் எண்களாகவும் $p^x=q^y=r^z$ ஆகவும், $q^2=pr$ ஆகவும் இருப்பின், $y=\frac{2xz}{x+z}$ என நிறுவுக.

(ii) a, b, c என்பன ஏதாவது மூன்று தொடரும் மாறுமில்லா முழுஎண்களாக இருப்பின், $2\log b = \log(1+ac)$ எனக் காட்டுக.

(02)

(a) கணித தொகுத்தறிவு முறையினை பயன்படுத்தி, ஒவ்வொரு நேர் முழுவெண் n இற்கும்,
$1+4+7+\cdots\cdots\cdots(3n-2)=\frac{n}{2}(3n-1)$ எனக் காட்டுக.

(b) $\frac{1}{r(r+1)}=\frac{A}{r}+\frac{B}{r+1}$ இன் மாறிலிகள் A, B களை காண்க. இங்கு $r = 1, 2, \ldots$
இலிருந்து $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)}$ இனை காண்க. அத்துடன்

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+1)}=\frac{n}{(n+1)(2n+1)}$$

என உய்த்தறிக.

(c) $|x^2-4|>|5x-8|$ எனும் சமனிலியை தீர்க்க.

(03)

a) (i) 'ENGINEERING TECHNOLOGY' எனும் சொல்களின் எழுத்துக்களிலிருந்து, இவை அனைத்தும் ஒரே நேரத்தில் எடுக்கப்பட்டு, அவற்றிலிருந்து உருவாக்கப்படக்கூடிய ஒழுங்கமைப்புக்கள் எத்தனை.

(ii) 'ENGINEERING TECHNOLOGY' எனும் சொற்களில் உள்ள எழுத்துக்களிலிருந்து, நான்கு ஒரே நேரத்தில் எடுக்கப்பட்டு அதிலிருந்து உருவாக்கப்படக்கூடிய சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) $(1+x)^n$ இன் ஈருறுப்பு விரிவின் மூன்று தொடர் உறுப்புக்கள் முறையே 36, 84, 126 ஆகும். n இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(c) பல்லுறுப்பி $f(x) = 4x^4+5x^3-10x^2-5x+6$ இனது காரணிகளை, காரணித்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி காண்க.

(04)

(a) $$\frac{(1+j)x-2j}{3+j} + \frac{(2-3j)y+j}{3-j} = j$$ ஆயின்,

x, y களின் மெய்ப்பெறுமானங்களைக் காண்க.

(b) z_1, z_2 என்பன வெவ்வேறான சிக்கலெண்களாகவும் $|z_2| = 1$ ஆகவும் இருப்பின், $$\left|\frac{z_2-z_1}{1-z_1z_2}\right| = 1$$ எனக் காட்டுக.

[உதவி: $z_1 = x+jy$ உம் $z_2 = \cos\theta + \sin\theta$ உம் ஆகும் எனக் கருதுக.]

(c) $x + j\sqrt{x^4+x^2+1}$ என்பதன் வர்க்கமூலத்தைக் காண்க.

[உதவி: $\{x+j\sqrt{x^4+x^2+1}\}^{1/2} = p+iq$] எனக் கொள்க.]

(d) பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியை தீர்க்க.

$$x+y+z = 8$$
$$3x-2y+z = 12$$
$$y-x = -3$$

(05)

(a) ஒரு இணைகரத்தின் இரண்டு அடுத்துள்ள பக்கங்களின் சமன்பாடுகள் $4x+5y=0$ உம் $7x+2y=0$ ஆகும். ஒரு மூலைவிட்டத்தின் சமன்பாடு $11x+7y-9=0$ ஆகும். மற்றைய இரண்டு பக்கங்களினதும் மற்றைய மூலைவிட்டத்தினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(b) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=2$ ஆகிய நேர்கோடுகளினால் உருவாக்கப்படும் பல்கோணியானது ஒரு சாய்சதுரம் எனக் காட்டுக.

(06) $(3,0)$, $(0,\sqrt{3})$, $(0,-\sqrt{3})$ ஆகிய ஆள்கூறுகளை உடைய புள்ளிகள் முறையே P, Q, R ஆகும். இப்புள்ளிகளூடாக ஒரு வட்டம் செல்லுமாயின்,

(i) வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(ii) வட்டத்தின் ஆரையையும், மைய ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

(iii) சிறிய வில் QR இன் நீளத்தைக் காண்க.

(iv) $y=mx+3$ எனும் ஒரு நேர்கோட்டின் படித்திறன் m ஆகும். நேர்கோடானது வட்டம் PQR ஐ இரு புள்ளிகள் L, M இல் வெட்டுகிறது. LM இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

(07)

(a) பின்வரும் எல்லைகளைக் கணிக்க ;

(i) $\displaystyle \lim_{\theta \to \pi/2} \frac{\sin\theta - 1}{\cos^2\theta}$ (ii) $\displaystyle \lim_{x \to \pi/4} \frac{\sec^2 x - 2}{\tan x - 1}$

(iii) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{3^n + 2^n}{3^n - 2^n}$

(b) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ என்பதை x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

$y = \sin(\sin x)$ ஆயின், $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \tan x \dfrac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0$

எனக் காட்டுக.

(c) இயந்திரமானது வேலை செய்யும் வீதமானது
$f(V) = 15V + \dfrac{6000}{V}$; $0 < V < 30$ என்பதால்
தரப்படுகிறது. இங்கு V ஆனது இயந்திரத்தின்
வேகமாகும். வேலை செய்யும் வீதமானது மிகக்
குறைவாக இருப்பதற்கு V இன் [illegible]
பெறுமானத்தைக் காண்க.

(08)

a) பின்வரும் தொகையீடுகளை கணிக்க.

(i) $\displaystyle \int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$ (ii) $\displaystyle \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ (iii) $\displaystyle \int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\, dx$

(b) பின்வரும் வரையறுத்த தொகையீடுகளைக் கணிக்க.

(i) $\displaystyle \int_1^2 \frac{3x\, dx}{(x-1)(x+2)}$ (ii) $\displaystyle \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x}$

(c) $y = 16 - x^2$ எனும் வளையியினாலும் x அச்சினாலும் அடைக்கப்படும் பரப்பினைக் காண்க.

(09)

(a) நிறுவுக.

(i) $\dfrac{\sin 2\theta + \sin\theta}{1 + \cos\theta + \cos 2\theta} = \tan\theta$

(ii) $\sec^2\theta\,(1 + \sec 2\theta) = 2\sec 2\theta$

(b) சமன்பாடுகளை தீர்க்க.

(i) $\cos x + \cos 3x = \sin 4x + \sin 2x$

(ii) $\sin x - \cos x = 1$

(c) பொதுவான குறியீடுகளை பயன்படுத்தி, முக்கோணி ABC இல்,

$$\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}$$ எனக் காட்டுக.

பதிப்புரிமையுடையது.