



ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
 ඉංජිනේරු තාක්‍ෂණ ඩිප්ලෝමා (පදනම්) පාඨමාලාව
 අවසාන පරීක්‍ෂණය 2012/2013
 ශුද්ධ ගණිතය - MPZ 2310 - II
 කාලය - පැය 03 යි

දිනය - 2013.07.25

වේලාව - පෙ.ව. 09.30 - ප.ව.1230 දක්වා

ප්‍රශ්න 06 කට පිළිතුරු සපයන්න.

Non programmable ගණක යන්ත්‍ර භාවිතා කළ හැක. ගණක යන්ත්‍ර සඳහා ජංගම දුරකථන භාවිතා කිරීමට ඉඩ දෙනු නොලැබේ.

01. (a) $x^2 + y^2 + 5xy = 85$ සහ $2(x^2 + y^2) + xy = 62$ සහ $x > y > 0$ වේ.

(i) $(x^2 + y^2)$ සහ xy හි අගයන් සොයන්න.

(ii) $(x + y)$ හා $(x - y)$ හි අගයන් සොයන්න.

(iii) x හා y හි අගයන් සොයන්න

(b) α හා β යනු $ax^2 + bx + c = 0$ හි මූල වේ. $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β ඇසුරෙන් සොයන්න.

(c) p, q හා r යනු අනුයාත සෘණ නොවන නිඛිල තුනකි. $\log(pr + 1) = 2\log q$ බව පෙන්වන්න.

02. (a) ගණිත අභ්‍යන්තර මූලධර්මය භාවිතයෙන් සියළුම n සඳහා $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n}{3}(2n - 1)(2n + 1)$ බව පෙන්වන්න.

(b) $U_r = r(r + 1)(r + 2)$ සහ $S_n = \sum_{r=1}^n U_r$ බව දී තිබේ.

$S_n = \frac{n}{4}(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ බව සාධනය කරන්න.

ඒකයින් $V_r = \frac{1}{S_r}$ වන $\sum_{r=1}^n V_r$ සොයන්න.

(c) $x - 4 < x(x - 4) \leq 5$; සපුරාලන x හි අගය පරාසය සොයන්න.

03. (a) (i) **FOUNDATION PROGRAMME** යන වචනයේ අකුරුවලින් කළ හැකි පිළියෙල කිරීම් ගණන සොයන්න.

(ii) එක්තරා පන්තියක ශිෂ්‍යයින් 9 ක් සිටිති. එංග්‍රී භාර ගුරුවරයා තරඟයක් සඳහා මෙම සිසුන් 9 දෙනා කණ්ඩායම් තුනකට වෙන් කරයි. කණ්ඩායම්වල ප්‍රමාණයන් සමානවීම අත්‍යවශ්‍ය නොවේ. කණ්ඩායමකට සිටිය හැකි අඩුම සිසුන් ගණන 2 කි. මෙසේ කණ්ඩායම් තුන තේරිය හැකි වෙනස් අකාර ගණන සොයන්න.

(පිළිතුර සුළුකර දැක්වීම අවශ්‍ය නොවේ.)

(b) $\left\{ax^2 + \frac{1}{bx}\right\}^9$ ප්‍රසාරණයේ x^6 හි සංගුණකයත්

$\left\{ax - \frac{1}{bx^2}\right\}^9$ ප්‍රසාරණයේ x^{-6} හි සංගුණකයත් සමාන වීමට a හා b සපුරාලන සම්බන්ධතාව සොයන්න.

(c) $f(x) \equiv 2x^3 + x^2 - 2x - 1$ ප්‍රකාශනයේ සාධක සෙවීමට සාධක ප්‍රමේයය භාවිතා කරන්න.

04. (a) $\frac{(1-j)x+2j}{1-j} + \frac{(3+j)y-2j}{1+j} = -j$ සපුරාලන x හා y හි තාත්වික අගයන් සොයන්න.

(b) $Z_1 = \cos\theta + j \sin\theta$; හා $Z_2 = x + jy$ හි $\left| \frac{Z_1 - Z_2}{1 - Z_1 Z_2} \right| = 1$ බව පෙන්වන්න.

(c) $|Z| - 1 = Z + 2j$ සමීකරණය සපුරාලන Z සොයන්න.

05. (a) ABCD සමාන්තරාශ්‍රයේ AB, BC පාදවල සමීකරණ පිළිවෙලින් $3x + y + 7 = 0$ හා $x + 3y + 5 = 0$ වේ. AD රේඛාව (-8, -3) ලක්ෂ්‍යය හරහා ද CD රේඛාව (5, -2) ලක්ෂ්‍යය හරහා ද ගමන් කරයි. D ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

(b) $S \equiv x^2 + y^2 + 6x - 2y - 17 = 0$ වෘත්තයේ සහ $y - x + 2 = 0$ සරල රේඛාවේ ජේදන ලක්ෂ්‍යයන් සොයන්න. ඉහත ජේදන ලක්ෂ්‍යයන් විෂ්කම්භයක අන්ත වන S_1 වෘත්තයේ සමීකරණය $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$ බව පෙන්වන්න.

06. ABC ත්‍රිකෝණයේ $A \equiv (1, 1), B \equiv \left(-1, \frac{5}{2}\right), C \equiv (-1, 11/3)$ වේ.

- (a) ත්‍රිකෝණයේ පාදවල සමීකරණ සොයන්න.
- (b) ත්‍රිකෝණයේ පාදවල දිග සොයන්න.
- (c) A කෝණයේ කෝණ සමවිජේදකවල සමීකරණ සොයන්න.
- (d) B කෝණයේ කෝණ සමවිජේදකවල සමීකරණ සොයන්න.
- (e) A හා B කෝණවල අන්තර්කෝණ සමවිජේදකවල සමීකරණ සොයන්න.
- (f) ABC ත්‍රිකෝණයේ අන්ත:කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

07. (a) පහත සීමා අගයන්න.

(i) $x \rightarrow a \frac{x\sqrt{x-a}\sqrt{a}}{x-a}$ (ii) $x \rightarrow 0 \frac{1-\cos 2x + \tan^2 x}{x \sin x}$

(b) $y = e^{-3x} \sin 4x$ නම් $\frac{dy}{dx} = y[\cot 4x - 3]$ බව පෙන්වන්න.

$y \frac{d^2y}{dx^2} + 16y^2 \operatorname{cosec}^2 4x - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

(c) දිග l වන AB දණ්ඩක් එහි A කෙළවරින් ආධාර කර තිබේ. W යනු දණ්ඩේ ඒකක දිගකට ඇතිවෙන ඒකාකාර භාරයයි. A සිට x දුරකින් වූ දණ්ඩ මත ලක්ෂ්‍යයක දණ්ඩේ නමුත් ඝූර්ණය (Bending Moment) $M = \frac{1}{2}lx - \frac{1}{2}Wx^2$ යන්නෙන් දෙනු ලබයි. දණ්ඩේ නමුත් ඝූර්ණය උපරිම වන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

08. (a) පහත අනුකලනයන් අගයන්න.

(i) $\int \frac{dx}{25x^2+16}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{3\cos x + \sin x}}$ (iii) $\int \frac{(1+\cos x)dx}{1-\cos x}$

(b) පහත නිශ්චිත අනුකලන අගයන්න.

(i) $\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2} dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$

(ඉඟිය : $x - a = a \sin \theta$ යොදන්න.)

(c) $y = 36 - x^2$ වක්‍රයක් x - අක්ෂයේ අතර ඇවිරෙන වර්ගඵලය සොයන්න.

09. (a) $\sin 3A + \sin 2A - \sin A \equiv 4 \sin A \cos \frac{A}{2} \cos \frac{3A}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(b) (i) $\tan 5x - \cot x = 0$ ($-\pi \leq x \leq \pi$)

(ii) $\sin^{-1}x + \sin^{-1}2x = \frac{\pi}{2}$ සමීකරණ විසඳන්න.

(c) භාමාන්‍ය අංකනයට අනුව ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ භාවිතයෙන් $\cos C, \cos \frac{C}{2}, \sin \frac{C}{2}$ හා $\sin C$ සඳහා ප්‍රකාශන a, b, c ඇසුරෙන් සොයන්න.

ඒකයින් ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින නියමය අපේක්ෂා කරන්න.



THE OPEN UNIVERSITY OF SRI LANKA
 DIPLOMA IN TECHNOLOGY (FOUNDATION LEVEL 02)
 FINAL EXAMINATION – 2012/2013
 MPZ2310 – PURE MATHEMATICS - II
 DURATION – THREE (3) HOURS.

Date: 25th July 2013

Time: 9.30a.m. – 12.30 p.m.

You can't use mobile phones as a calculator. You can use non programmable calculators. Answer any six questions only.

01. a) If $x^2 + y^2 + 5xy = 85$ and $2(x^2 + y^2) + xy = 62; x > y > 0$
- Find the values for $(x^2 + y^2)$ and xy
 - Find the values for $(x + y)$ and $(x - y)$
 - Find the values for x , and y .
- b) Let α, β are the roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$
 Find the roots of the equation $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$ in terms of α and β .
- c) If p, q and r are any three consecutive non negative integers, show that $\log(pr + 1) = 2\log q$
02. a) Using the principle of mathematical induction show that for each positive integer n , $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n}{3}(2n-1)(2n+1)$
- b) Given that $U_r = r(r+1)(r+2)$ and $S_n = \sum_{r=1}^n U_r$
 Prove that $S_n = \frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$
 Hence find $\sum_{r=1}^n V_r$ where $V_r = \frac{1}{S_r}$
- c) Find the range of x for which $x - 4 < x(x - 4) \leq 5$;

03. a) i. How many arrangements can be formed out of the letters of the words "FOUNDATION PROGRAMME"
- ii. There are 9 students in a certain class. The class teacher wants to divide those students into three teams to compete in a contest. The sizes of the teams need not be equal and a team may consist of at least two students.

Find the number of ways of how the three teams could be formed.
(answer need not be simplified)

- b) Find the relation between a and b, so that the coefficients of x^6 in $\left\{ax^2 + \frac{1}{bx}\right\}^9$ and x^{-6} in $\left\{ax - \frac{1}{bx^2}\right\}^9$ are equal.
- c) Use the factor theorem to find the factors of the polynomial $f(x) \equiv 2x^3 + x^2 - 2x - 1$

04. a) Find the real values of x and y so that $\frac{(1-j)x+2j}{1-j} + \frac{(3+j)y-2j}{1+j} = -j$
- b) Let $Z_1 = \cos\theta + j\sin\theta$ and $Z_2 = x + jy$
Show that $\left|\frac{Z_1 - Z_2}{1 - Z_1 Z_2}\right| = 1$
- c) If Z satisfies the equation $|Z| - 1 = Z + 2j$, then find Z.

05. a) ABCD is a parallelogram having equations of AB, BC as $3x + y + 7 = 0$ and $x + 3y + 5 = 0$ respectively. The line AD passes through the point (-8, -3) and CD passes through the point (5, -2). Find the coordinates of D.
- b) Find the points of intersection of the circle $S \equiv x^2 + y^2 + 6x - 2y - 17 = 0$ and the line $y - x + 2 = 0$. Show that the equation of the circle S_1 , which has the above two points as the ends of a diameter $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$.

06. ABC is a triangle where $A \equiv (1, 1)$, $B \equiv (-1, \frac{5}{2})$ $C \equiv (-1, \frac{11}{3})$

- a) Find the equations of the sides.
- b) Find the lengths of the sides.
- c) Find the equations of the bisectors of the angle A.
- d) Find the equations of the bisectors of the angle B.
- e) Determine the equations of the internal bisectors of the angles A and B.
- f) Find the coordinates of the incentre of the triangle ABC.

07. a) Evaluate the following limits.

i. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x - a}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \tan^2 x}{x \sin x}$

b) If $y = e^{-3x} \sin 4x$ show that

$$\frac{dy}{dx} = y[\cot 4x - 3]$$

$$y \frac{d^2y}{dx^2} + 16y^2 \operatorname{cosec}^2 4x - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

c) A beam of length l is supported at one end. If w is the uniform load per unit length, the bending moment at a distance x from the end is given by $M = \frac{1}{2}lx - \frac{1}{2}wx^2$. Find the point on the beam at which the bending moment has maximum value.

08. a) Evaluate the following integrals.

i. $\int \frac{dx}{25x^2 + 16}$ ii. $\int \frac{dx}{\sqrt{3} \cos x + \sin x}$ iii. $\int \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} dx$

b) Evaluate the following definite integrals.

i. $\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2} dx$ ii. $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$

(Hint. Put $x - a = a \sin \theta$)

c) Find the area bounded by the curve $y = 36 - x^2$ and the x -axis

09. a) Show that

$$\sin 3A + \sin 2A - \sin A = 4 \sin A \cos \frac{A}{2} \cos \frac{3A}{2}$$

b) Find the solutions of the following equations.

i. $\tan 5x - \cot x = 0$ ii. $\sin^{-1} x + \sin^{-1} 2x = \frac{\pi}{2}$

$$(-\pi \leq x \leq \pi)$$

c) By using the usual notation, show that in the triangle ABC

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Find the expressions for $\cos C$, $\cos \frac{C}{2}$, $\sin \frac{C}{2}$ and $\sin C$ in terms of a, b , and c .

Hence deduce the sine rule for a triangle.

- Copyrights reserved -

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
தொழில்நுட்பவியல் டிப்ளோமா (அடிப்படை மட்டம் 02)
இறுதிப் பரீட்சை 2012/2013
தூய கணிதம் - MPZ 2310 - II
காலம்: மூன்று (03) மணித்தியாலங்கள்



திகதி: 2013.07.25

நேரம்: மு.ப 09.30 - பி.ப 1230 வரை

நீங்கள் கையடக்கத் தொலைபேசிகளை கணிப்பான்களாகப் பயன்படுத்த முடியாது.
நீங்கள் Non programmable கணிப்பான்களாகப் பயன்படுத்த முடியும்.
ஏதாவது ஆறு (06) வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

01. (a) $x^2 + y^2 + 5xy = 85$ ஆகவும் $2(x^2 + y^2) + xy = 62$ ஆகவும் $x > y > 0$ ஆகவும் இருப்பின்,
- (i) $(x^2 + y^2)$ இனதும் xy இனதும் பெறுமானங்களைக் காண்க.
(ii) $x + y$ இனதும் $x - y$ இனதும் பெறுமானங்களைக் காண்க.
(iii) x, y களினது பெறுமானங்களைக் காண்க.
- (b) சமன்பாடு $ax^2 + bx + c = 0$ இனது மூலங்கள் α, β எனக் கொள்க.
சமன்பாடு $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$ இனது மூலங்களை α, β உறுப்புகளில் தருக.
- (c) p, q, r என்பன ஏதாவது மூன்று அடுத்து வருகின்ற மறை முழு எண் அல்லாத எண்கள். $\log(pr + 1) = 2\log q$ எனக்காட்டுக.
02. (a) கணிதத் தொகுத்தறிவு முறையினைப் பயன்படுத்தி, ஒவ்வொரு நேர் முழுவெண் n இற்கும் $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n}{3}(2n - 1)(2n + 1)$ எனக் காட்டுக.
- (b) $U_r = r(r + 1)(r + 2)$ எனவும் $S_n = \sum_{r=1}^n U_r$ எனவும் தரப்பட்டின்,
 $S_n = \frac{n}{4}(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ என நிறுவுக.
இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^n V_r$ ஐக் காண்க. இங்கு $V_r = \frac{1}{2r}$
- (c) $x - 4 < x(x - 4) \leq 5$ என்பதில் x இனது வீச்சைக் காண்க.

03. (a) (i) "FOUNDATION PROGRAMME" என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களிலிருந்து எத்தனை ஒழுங்கமைப்புக்களை உருவாக்க முடியும்?
- (ii) ஒரு குறிப்பிட்ட வகுப்பில் 9 மாணவர்கள் இருக்கிறார்கள். வகுப்பு ஆசிரியை அம்மாணவர்களை 3 குழுக்களாகப் பிரிப்பதற்கு எண்ணுகிறார். அந்தக் குழுக்களிலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை சமமானதாக இருக்க வேண்டியதில்லை. ஒரு குழுவில் ஆகக் குறைந்தது 2 மாணவர்கள் இருக்கலாம். அந்த மூன்று குழுக்களும் உருவாக்கப்படுவதற்கு உள்ள வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
(விடை சுருக்கப்படத் தேவையில்லை.)
- (b) $\left\{ax^2 + \frac{1}{bx}\right\}^8$ இல் x^6 இன் குணகமும்
- $\left\{ax - \frac{1}{bx^2}\right\}^9$ இல் x^{-6} இன் குணகமும் சமனாயின் a, b களிற் கு இடையிலுள்ள தொடர்பைக் காண்க.
- (c) காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி பல்லுறுப்பியின் காரணியைக் காண்க.
 $f(x) \equiv 2x^3 + x^2 - 2x - 1$
04. (a) $\frac{(1-j)x+2j}{1-j} + \frac{(3+j)y-2j}{1+j} = -j$ ஆக இருப்பின், x, y இன் மெய்ப்பெறுமானங்களைக் காண்க.
- (b) $Z_1 = \cos\theta + j \sin\theta$; எனவும் $Z_2 = x + jy$ எனவும் கொள்வோமாயின்,
 $\left| \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 z_2} \right| = 1$ எனக் காட்டுக.
- (c) $|Z| - 1 = Z + 2j$ எனும் சமன்பாட்டை Z திருப்தி செய்யுமாயின், Z ஐக் காண்க.
05. (a) ABCD ஒரு இணைகரம். அதில் AB, BC இன் சமன்பாடுகள் முறையே $3x + y + 7 = 0$ மற்றும் $x + 3y + 5 = 0$ ஆகும். நேர்கோடு AD புள்ளி (-8, -3) இனூடாகவும், நேர்கோடு CD புள்ளி (5, -2) இனூடாகவும் செல்கிறது. D யின் ஆள் கூறுகளைக் காண்க.
- (b) வட்டம் S $\equiv x^2 + y^2 + 6x - 2y - 17 = 0$ உம் நேர்கோடு $y - x + 2 = 0$ உம் இடைவெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்க. அவ்விரு புள்ளிகளையும் விட்டமுனைகளாகக் கொண்ட வட்டம் S₁ இன் சமன்பாடு,
 $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$ எனக் காட்டுக.

06. ஒரு முக்கோணி ABC இல் $A \equiv (1,1)$, $B \equiv \left(-1, \frac{5}{2}\right)$, $C \equiv \left(-1, \frac{11}{3}\right)$

- (a) பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
 (b) பக்கங்களின் நீளங்களைக் காண்க.
 (c) கோணம் A யின் இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
 (d) கோணம் B யின் இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
 (e) கோணம் A , B களின் உள்ளிருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
 (f) முக்கோணம் ABC இன் உள்மையத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

07. (a) பின்வரும் எல்லைகளின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க

$$(i) \quad x \rightarrow a \quad \frac{x\sqrt{x-a}\sqrt{x}}{x-a} \quad (ii) \quad x \rightarrow 0 \quad \frac{1-\cos 2x + 7\sin^2 x}{x \sin x}$$

(b) $y = e^{-3x} \sin 4x$ ஆயின் $\frac{dy}{dx} = y[\cot 4x - 3]$

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} + 16y^2 \operatorname{cosec}^2 4x - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

(c) l நீளமுடைய ஒரு வளையானது ஒரு முனையில் தாங்கப்படுகிறது. W எனும் வீதத்தில் சீரான சுமை வளையில் இருக்குமாயின், முனையிலிருந்து x தூரத்தில் தாக்கும் கூன் திருப்பம் (Bending moment) M ஆனது, (Bending Moment) $M = \frac{1}{2}lx - \frac{1}{2}Wx^2$ எனும் சமன்பாட்டால் தரப்படுகிறது. வளையின் எப்புள்ளியில் மிகப்பெரிய கூன் திருப்பம் உள்ளது எனக் காட்டுக.

08. (a) பின்வரும் தொகையீடுகளை தொகையிடுக.

$$(i) \quad \int \frac{dx}{25x^2+16} \quad (ii) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3\cos x + \sin x}} \quad (iii) \quad \int \frac{(1+\cos x)dx}{1-\cos x}$$

(b) பின்வரும் வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீடுகளின் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

$$(i) \int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2} dx \quad (ii) \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$$

(உதவி: $x - a = a \sin \theta$ எனக் கொள்க.

(c) x அச்சினாலும் வளையி $y = 36 - x^2$ இனாலும் அடைக்கப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

09. (a) (i) $\sin 3A + \sin 2A - \sin A \equiv 4 \sin A \cos \frac{A}{2} \cos \frac{3A}{2}$ எனக் காட்டுக.

(b) பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $\tan 5x - \cot x = 0 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$

(ii) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} 2x = \frac{\pi}{2}$

(c) முக்கோணம் ABC இல் பயன்படுத்தப்படும் வழமையான குறியீடுகள் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ எனின், $\cos C, \cos C/2, \sin C/2, \sin C$ என்பனவற்றின் விபரணைகளை உறுப்புக்கள் a, b, c இல் காண்க.

இதிலிருந்து ஒரு முக்கோணிக்கான சைன் விதியை உய்த்தறிக.

பதிப்புரிமையுடையது