



ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය

ඉංජිනේරු පීඨය

තාක්ෂණ සඳහා පදනම් පාඨමාලාව -2013/2014

අවසාන පරීක්ෂණය

ශුද්ධ ගණිතය - MPZ2310 - ප්‍රශ්න පත්‍රය II

කාලය - පැය තුනයි

විභාග අංකය -

දිනය - 2014.08.20

වේලාව - පැය 0930 - 12.30 දක්වා

ප්‍රශ්න 06 කට පිළිතුරු සපයන්න.

Non programmable ගණක යන්ත්‍ර භාවිතා කළ හැක. ගණක යන්ත්‍ර සඳහා ජංගම දුරකථන භාවිතා කිරීමට ඉඩ දෙනු නොලැබේ.

01. (a) $x^2 + y^2 = 41$ සහ $xy = 20, x > y > 0$ නම් $(x + y)^2$ හා $(x - y)^2$ සඳහා අගයන් සොයන්න. එනමින් x හා y හි අගයන් සොයන්න.

(b) $f(x) \equiv x^2 + 4\lambda x + 18\lambda - 18$ ලෙස ගනිමු.

(i) $f(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්වික මූල පවතින සේ λ හි අගයන් සොයන්න.

(ii) $\lambda = -1$ යැයි දී තිබේ. එවිට $f(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β වේ.

$(\alpha + 2), (\beta + 2)$ මූල ලෙස පවතින වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

(c) $2^{2x} - 20 \cdot 2^x + 64 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

02. (a) ගණිත අනුක්‍රමය මූලධර්මය භාවිතයෙන් $(3^{2n} - 1)$, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා 8 හි ගුණාකාරයක් වන බව පෙන්වන්න.

(b) $U_r = \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$ යැයි දී තිබේ.

$f(r) - f(r+1) = U_r$ වන සේ λ හි අගය සොයන්න.

මෙහි $f(r) = \frac{\lambda}{r(r+1)}$ වේ.

$\sum_{r=1}^n U_r = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ හි අගය සොයන්න.

(c) $\frac{2x}{x-3} \geq \frac{1}{x-1}$; $x \neq 3, x \neq 1$

අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගය තුලනය සොයන්න.

03. (a) KNDALIYADDAPALUWA යන වවනගේ සියළුම අතුරු ගෙන කළ හැකි වෙතක් පිළියෙල කිරීම් කොපමණ ද?

ඉන් කොපමණ සංඛ්‍යාවක A අක්ෂර 6 යාබදව පිහිටයි ද?

- (b) $\left(2x + \frac{1}{3x^2}\right)^9$ ප්‍රකාරණයේ $x=1/6$ විට විශාලතම පදය සොයන්න.

- (c) $F(x) = x^8 + \lambda x^2 + \mu x + \gamma$ බහු පදය $(x-1), (x+1)$ හා x වලින් බෙදුවිට ශේෂයන් පිළිවෙලින් 2, 5 හා 2 වේ. λ, μ, γ හි අගයන් සොයන්න.

04. (a) $Z = \sqrt{3} + j$ නම්

- (i) $Z = r \{ \cos \theta + j \sin \theta \}$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $r > 0$ හා $2\pi \geq \theta > 0$ වේ.

- (ii) $Z + \frac{1}{Z}$, a හා b තාත්වික වූ $a+jb$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න.

- (b) $\frac{3-4j}{5-12j}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $a+jb$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න.

- (c) $\frac{1-2j \sin \theta}{3+2j \sin \theta}$

- (i) තාත්වික (ii) හුදෙක් අතාත්වික වන θ හි අගයන් සොයන්න.

- (d) $x + 2y - z = 9$

$$x + 5y + z = 25$$

$$x + y + z = 9$$

සමීකරණ පද්ධතිය විසඳන්න.

05. ABCD සමචතුරස්‍රය $A \equiv (6, 0), C \equiv (0, 8)$ වනසේ පිහිටයි.

- (i) AC හා BD විකර්ණවල සමීකරණ ලබා ගන්න.
- (ii) විකර්ණවල දිග සොයන්න. එනමින් සමචතුරස්‍රයේ පැත්තක දිගත්, වර්ගඵලයත් ලබා ගන්න.
- (iii) AB හා AD පාදවල අනුක්‍රමණ සොයන්න.
- (iv) AB හා AD පාදවල සමීකරණ සොයන්න.
- (v) B හා D ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක සොයන්න.
- (vi) BC හා CD පාදවල සමීකරණ සොයන්න.

06. A, B ලක්ෂ්‍ය දෙකක ඛණ්ඩාංක පිළිවෙලින් (x_a, y_a) සහ (x_b, y_b) වේ. AB රේඛාව විෂ්කම්භයක් සේ පවතින වෘත්තයේ සමීකරණය

$$(x - x_a)(x - x_b) + (y - y_a)(y - y_b) = 0 \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ O මූල ලක්ෂ්‍ය, $P \equiv (3, 4)$ හා $Q \equiv \left(\frac{17}{5}, \frac{6}{5}\right)$ වේ. PQ ට ලම්භ ලෙස O හරහා ඇඳී රේඛාවත්, P හරහා OQ ට ලම්භ ලෙස ඇඳී රේඛාවත් H හිදී හමු වේ.

H හි ඛණ්ඩාංක $(21/5, 3/5)$ බව පෙන්වන්න.

QH, OP ට ලම්භ වන බව පෙන්වන්න.

QH රේඛාව OP, R හිදී හමුවේ.

R හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

O, Q, R ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. මෙම වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හා අරය සොයන්න.

07. (a) x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

$$(i) \quad y = \cos^{-1} \left[\frac{(1-x^2)}{1+x^2} \right]$$

$$(ii) \quad y = \frac{\sec x - \tan x}{\sec x + \tan x}$$

$$(iii) \quad y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$(iv) \quad y = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}}$$

(b) $\sqrt{1-x^2} \quad y = \sin^{-1} x$ නම්

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} - y = 0 \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

(c) අරය a වූ ගෝලයක් තුළ පරිගත කළහැකි උපරිම පරිමාවක් සහිත සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයේ උස $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ බව පෙන්වන්න.

08. (a) පහත අනුකලය සොයන්න.

$$\int \frac{dx}{(x^2+16)(x^2+9)}$$

- (b) පහත නියමිත අනුකලන අගයන්න.

$$(i) \int_0^2 \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) dx \quad (ii) \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\sin 2x} \, dx$$

- (c) පහත අනුකලය සොයන්න.

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx$$

- (d) $y = \sqrt{1-x^2}$ චක්‍රයක් x- අක්ෂයෙන් මායිම් වන වර්ගඵලය සොයන්න.

09. (a) (i) මෙම සමීකරණය විසඳන්න.

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} 2x = \pi/4$$

- (ii) $2\cot x + \operatorname{cosec} 2x + 2\cot 2x = 0$ නම්

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

- (ii) $\cos x + \cos 2x = \sin 3x$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

- (b) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සාමාන්‍ය අංකනයේ

$$(i) a^2 = (b+c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{A}{2}$$

$$(ii) a \cos A + b \cos B = c \cos (A-B)$$

බව පෙන්වන්න.

නිමිකම් ඇවිරිණි.



THE OPEN UNIVERSITY OF SRI LANKA
 FACULTY OF ENGINEERING TECHNOLOGY
 FOUNDATION PROGRAMME FOR TECHNOLOGY
 FINAL EXAMINATION– 2013/2014
 MPZ2310 – PURE MATHEMATICS - PAPER II
 DURATION – THREE (03) HOURS

INDEX NUMBER.....

Date: 20th August 2014

Time: 0930-1230 hours

Answer six (06) questions only. You can't use mobile phones as calculators.

01. a) If $x^2 + y^2 = 41$ and $xy = 20$, $x > y > 0$.
 Find the values for $(x + y)^2$ and $(x - y)^2$
 Hence find the values for x, y .
- b) Let $f(x) \equiv x^2 + 4\lambda x + 18\lambda - 18$
- i. Find the values of λ such that $f(x) = 0$ has real roots.
- ii. Given that $\lambda = -1$, let α, β are the roots of the equation $f(x) = 0$.
 Find the quadratic equation whose roots are $[\alpha + 2]$ and $[\beta + 2]$
- c) Solve the equation $2^{2x} - 20(2^x) + 64 = 0$
02. a) By the principle of mathematical induction, show that $(3^{2n} - 1)$ is a multiple of 8
 for all $n \in \mathbb{Z}^+$
- b) Let $U_r = \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$
- Find λ such that $f(r) - f(r+1) = U_r$
- Where $f(r) = \frac{\lambda}{r(r+1)}$

Show that

$$\sum_{r=1}^n Ur = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

Find the value $\sum_{r=1}^{\infty} Ur$

- c) Find the set of values of x satisfying the inequality

$$\frac{2x}{x-3} \geq \frac{1}{x-1}, \quad x \neq 3, x \neq 1$$

03. a) In how many different ways can the letters of the word

KANDALIYADDAPALUWA be arranged.

In how many of these arrangements, will six "A" s be adjacent.

- b) Find the greatest term of the expression $\left(2x + \frac{1}{3x^2}\right)^9$ when $x = \frac{1}{6}$

- c) When the polynomial $f(x) = x^8 + \lambda x^2 + \mu x + \gamma$ is divided by $(x-1)$, $(x+1)$ and x , the remainders are 2, 5 and 2 respectively.

Find the values of λ, μ, γ .

04. a) If $Z = -\sqrt{3} + j$

i. express in the form $Z = r\{\cos\theta + j\sin\theta\}$

Where $r > 0$ and $2\pi \geq \theta > 0$.

ii. express $Z + \frac{1}{Z}$ in the form $a + jb$

where $a, b \in R$

- b) Express the complex number $\frac{3-4j}{5-12j}$ in the form $a + jb$.

- c) Find the value of θ such that $\frac{1-2j\sin\theta}{3+2j\sin\theta}$ is
- Real
 - Purely Imaginary
- d) Solve the following system of equations.
- $$x + 2y - z = 9$$
- $$x + 5y + z = 25$$
- $$x + y + z = 9$$
05. A square ABCD is such that the coordinates of $A \equiv (6, 0)$, $C \equiv (0, 8)$
- Find the equations of the diagonals AC and BD.
 - Find the length of the diagonals. Hence find the length of a side of the square and the area of the square.
 - Find the gradient of the sides AB and AD.
 - Find the equations of the sides AB and AD.
 - Find the coordinates of the points B and D.
 - Find the equations of sides BC and CD.
06. A, B are two points (x_a, y_a) and (x_b, y_b) respectively. Show that the equation of the circle with AB as a diameter is $(x - x_a)(x - x_b) + (y - y_a)(y - y_b) = 0$.

A triangle has the vertices, the origin O and the points $P \equiv (3, 4)$, $Q \equiv (17/5, 6/5)$. The line through O perpendicular to PQ and the line through P perpendicular to OQ meet at H. Show that the coordinates of $H \equiv \left[\frac{21}{5}, \frac{3}{5} \right]$.

Show that QH is perpendicular to OP.

If the line QH meets OP at R. Find the coordinates of R;

Find the equation of the circle that passes through the points O, Q and R;

Find the centre and radius of this circle.

07. a) Differentiate w.r to x .

i. $y = \cos^{-1} \left[\frac{1-x^2}{1+x^2} \right]$

ii. $y = \frac{\sec x - \tan x}{\sec x + \tan x}$

iii. $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

iv. $y = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$

b) If $\sqrt{1-x^2} \quad y = \sin^{-1} x$

Prove that $(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} - y = 0$

c) Prove that the height of the right circular cylinder of maximum volume that can be inscribed in a sphere of radius 'a' is $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

08. a) Find

$$\int \frac{dx}{(x^2+16)(x^2+9)}$$

b) Evaluate the following definite integrals.

i. $\int_0^2 \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) dx$

ii. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\sin 2x} \, dx$

c) Find

$$\int e^{ax} \sin bx dx$$

d) Find the area bounded by the curve

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{and the } x - \text{axis.}$$

09. a) i. Solve the following equation

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} 2x = \pi/4$$

ii. If $2 \cot x + \operatorname{Cosec} 2x + 2 \cot 2x = 0$ then show that $\cos x = \pm 1/\sqrt{6}$

iii. Find the general solution of the equation $\cos x + \cos 2x = \sin 3x$

b) With the usual notation in a triangle ABC, Prove that

i. $a^2 = (b + c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{A}{2}$

ii. $a \cos A + b \cos B = c \cos (A - B)$

- Copyright reserved -



இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
எந்திரவியல் தொழில்நுட்பவியல் பீடம்
அடிப்படை மட்டம்

இறுதிப் பரீட்சை 2013/2014

MPZ2310 - தூயகணிதம் பகுதி II

காலம்: மூன்று (03) மணித்தியாலங்கள்

திகதி: 20.08.2014

நேரம்: மு.ப 09.30 - பி.ப 12.30 வரை

எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை தருக. நீங்கள் கையடக்கத் தொலைபேசியை கணிப்பானாகப் பயன்படுத்த முடியாது.

01. (a) $x^2 + y^2 = 41$, $xy = 20$, $x > y > 0$ ஆயின், $(x + y)^2$ மற்றும் $(x - y)^2$ இனதும் பெறுமானங்களைக் காண்க. இதிலிருந்து x, y களின் பெறுமதிகளைக் காண்க.
- (b) $f(x) \equiv x^2 + 4\lambda x + 18\lambda - 18$ எனக் கொள்க.
- (i) $f(x) = 0$ ஆனது, மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருக்குமாயின், λ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
- (ii) $\lambda = -1$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. சமன்பாடு $f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனக் கொள்வோமாயின்,
- $(\alpha + 2), (\beta + 2)$ என்பனவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.
- (c) சமன்பாடு $2^{2x} - 20 \times (2^x) + 64 = 0$ இனைத் தீர்க்க
02. (a) கணித தொகுத்தறிவு முறையைப் பயன்படுத்தி $(3^{2n} - 1)$ ஆனது, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் 8 இன் ஒரு பெருக்கம் எனக் காட்டுக.
- (b) $U_r = \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$ எனக் கொள்க.
- $f(r) - f(r+1) = U_r$ ஆயின், λ ஐக் காண்க.
- இங்கு $f(r) = \frac{\lambda}{r(r+1)}$ ஆகும்.
- $\sum_{r=1}^n U_r = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ எனக் காட்டுக.
- $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ இன் பெறுமதியைக் காண்க.
- (c) இச் சமனிலியைத் திருப்தி செய்யக்கூடிய ஒரு தொகுதி x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
- $\frac{2x}{x-3} \geq \frac{1}{x-1}; x \neq 3, x \neq 1$

03.

- (a) எத்தனை வித்தியாசமான வழிகளில் 'KANDALIYADDAPALUWA' எனும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்கள் ஒழுங்கமைக்கப்பட முடியும்?

இந்த ஒழுங்கமைப்புக்களில் அடுத்தடுத்து ஆறு 'A' இருக்கத்தக்கதாக எத்தனை ஒழுங்கமைப்புக்கள் இருக்கின்றன?

- (b) $x = 1/6$ ஆகும்போது $(2x + 1/3x^2)^9$ எனும் விபரணையின் மிகப்பெரிய உறுப்பைக் காண்க.

- (c) பல்லுறுப்பி $F(x) = x^8 + \lambda x^2 + \mu x + \gamma$ ஆனது $(x-1), (x+1)$ மற்றும் x என்பனவற்றால் பிரிக்கப்படும் போது மீதிகள் முறையே 2, 5, 2 ஆகும். λ, μ, γ இன் பெறுமதிகளைக் காண்க.

04.

- (a) $Z = \sqrt{3} + j$ ஆயின்,

- (i) $Z = r \{ \cos \theta + j \sin \theta \}$ எனும் வடிவில் விபரிக்க. இங்கு $r > 0$ ஆகவும், $2\pi \geq \theta > 0$ ஆகவும் இருக்கிறது.

- (ii) $Z + \frac{1}{Z}$ என்பதை $a+jb$ வடிவில் விபரிக்க. இங்கு $a, b \in \mathbb{R}$

- (b) சிக்கலெண் $\frac{3-4j}{5-12j}$ ஐ $a+jb$ வடிவில் விபரிக்க.

- (c) $\frac{1-2j \sin \theta}{3+2j \sin \theta}$ ஆனது,

- (i) மெய் (ii) முற்று முழுதாக கற்பனை ஆக இருக்கும் சந்தர்ப்பங்களில் θ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

- (d) பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியைத் தீர்க்க.

$$x + 2y - z = 9$$

$$x + 5y + z = 25$$

$$x + y + z = 9$$

05. ஒரு சதுரம் ABCD இல் ஆள்கூறுகள் $A \equiv (6,0), C \equiv (0,8)$ ஆகும்.

- (i) மூலைவிட்டங்கள் AC, BD இன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
- (ii) மூலை விட்டங்களின் நீளங்களைக் காண்க. இதிலிருந்து சதுரத்தின் பக்க நீளங்களைக் காண்பதுடன், சதுரத்தின் பரப்பையும் காண்க.
- (iii) பக்கங்கள் AB, AD களின் சாய்வுகளைக் காண்க.
- (iv) பக்கங்கள் AB, AD களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
- (v) புள்ளிகள் B, D களின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
- (vi) பக்கங்கள் BC, CD களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

06. A,B ஆகிய இரண்டு புள்ளிகள் முறையே $(x_a, y_a), (x_b, y_b)$ ஆகும். AB யை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x - x_a)(x - x_b) + (y - y_a)(y - y_b) = 0$ எனக் காட்டுக.

ஒரு முக்கோணம் உற்பத்தி O புள்ளிகள் $P \equiv (3,4), Q \equiv \left(\frac{17}{5}, \frac{6}{5}\right)$ என்பவற்றை உச்சிகளாகக் கொண்டுள்ளது. PQ இற்கு செங்குத்தாக O வினாடாகச் செல்லும் நேர்கோடும், P யினாடாகச் செல்லும் நேர்கோடும் H இல் சந்திக்கிறது.

H இன் ஆள்கூறு $H \equiv (21/5, 3/5)$ எனக் காட்டுக.

QH ஆனது OP க்கு செங்குத்தாகும் எனக் காட்டுக.

QH ஆனது OP ஐ R இல் சந்திக்குமாயின்,

R இன் ஆள்கூற்றைக் காண்க.

புள்ளிகள் O,Q,R களினாடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இந்த வட்டத்தின் மையம், ஆரை என்பவற்றைக் காண்க.

07. (a) x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

$$(i) y = \cos^{-1} \left[\frac{(1-x^2)}{1+x^2} \right]$$

$$(ii) y = \frac{\sec x - \tan x}{\sec x + \tan x}$$

$$(iii) y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$(iv) y = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}}$$

(b) $\sqrt{1-x^2} y = \sin^{-1} x$ ஆயின்,

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} - y = 0 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

(c) a ஆரையுடைய ஒரு கோளத்திற்குள் வரையக்கூடிய அதிகூடிய கனவளவைக் கொண்ட செவ்வட்ட உருளையின் உயரம் $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ என நிறுவுக.

08. (a) காண்க.

$$\int \frac{dx}{(x^2+16)(x^2+9)}$$

(b) பின்வரும் வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீடுகளின் பெறுமானம் கணிக்குக.

$$(i) \int_0^2 \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) dx \quad (ii) \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\sin 2x} dx$$

(c) $\int e^{ax} \sin bx dx$ ஐக் காண்க.

(d) வளையி $y = \sqrt{1-x^2}$ இனாலும் x- அச்சினாலும் அடைக்கப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

09. (a) பின்வரும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$$(i) \tan^{-1}x + \tan^{-1}2x = \pi/4$$

$$(ii) 2\cot x + \operatorname{cosec} 2x + 2\cot 2x = 0 \quad \text{ஆயின்,}$$

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{எனக் காட்டுக.}$$

(ii) சமன்பாடு $\cos x + \cos 2x = \sin 3x$ இன் பொதுத் தீர்வைக் காண்க.

(b) முக்கோணம் ABC இன் வழமையான குறியீடுகளில்,

$$(i) a^2 = (b+c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{A}{2}$$

$$(ii) a \cos A + b \cos B = c \cos (A-B)$$

என நிறுவுக.

- பதிப்புரிமை பெற்றது -