ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය - **2017/2018**
ශුද්ධ ගණිතය - තුන්වන මට්ටම
PEU3301/ PUU1141 - ගණිතයේ පදනම

කාලය පැය දෙකයි.

දිනය :- 2019.03.29 | වේලාව :- පෙ.ව. 09.30 - පෙ.ව. 11.30 දක්වා

ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (a) (i) $A = \{\{1\}, \phi, 1\}$ වේ. $\mathcal{P}(A)$ කුලකය එනම් A හි බල කුලකය ප්‍රවේශමෙන් ලියා දක්වන්න.

   (ii) $A_n = \{m \in \mathbb{N} : m \leq n\}$ සහ $B_n = \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$ වේ.
   $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ සහ $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ සොයන්න.

   (iii) $((3, \infty) \setminus [4,5]) \cap \{4\}$ කුලකය ප්‍රාන්තරවල මේලයක් ලෙස ලියා දක්වන්න.

   (iv) $A_n = \left\{\left(0, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ ප්‍රාන්තර සමූහයකි. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ සහ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ සොයන්න.

   (v) $A = \left\{\frac{m}{n} : m < n,\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$ සහ $B = \left\{\frac{m}{n} : m \leq n,\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$ වේ.
   අවයව ලැයිස්තුගත කරමින් $B \setminus A$ කුලකය ලියා දක්වන්න.

   (b) P යනු පහත සඳහන් ගුණ ඇති $\mathbb{Q}$ හි උපකුලකයකි.

   A1: $-2 \in P$ සහ $2 \in P$ වේ.

   A2: $a, b \in P$ නම් එවිට $\frac{a+b}{2} \in P$ වේ.

   $\frac{1}{32} \in P$ සහ $\frac{7}{8} \in P$ බව සාධනය කරන්න.

2. (a) $\mathbb{Z}$ හි පහත සඳහන් එක් එක් සම්බන්ධතා තුල්‍යතා සම්බන්ධයක්ද නැත්ද යන බව සොයන්න. ඔබේ පිළිතුර පැහැදිලි කරන්න.

   (i) $x^2 - y^2$, 3 ගුණාකාරයක් නම් xRy වේ.

   (ii) $x^2 + y^2$, 3 ගුණාකාරයක් නම් xRy වේ.

(b) $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ යනු $\mathbb{Z}$ හි සියළුම උපකුලකවලින් සමන්විත කුලකය වේ. R යනු $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ හි අර්ථදක්වා ඇති එක් එක් $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ සඳහා $A \subsetneq B$ නම් ARB වන සම්බන්ධතාවය වේ. R යනු ආංශික වශයෙන් පරිපාටිගත සම්බන්ධයක් බව ඔප්පු කරන්න.

R යනු පූර්ණ පරිපාටිගත සම්බන්ධයක් ද? ඔබේ පිළිතුර පැහැදිලි කරන්න.

(c) ඕනෑම තාත්වික x සඳහා, $x > 0$ සහ $x \neq 1$ නම් එවිට $\frac{1}{x(1-x)} \geq 4$ බව සාධනය කරන්න.

3. (a) පහත සඳහන් එක් එක් අවස්ථාවන් සඳහා ශ්‍රිතයන් සොයන්න.

(i) $\mathbb{N}$ සිට $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ට ඇති සමක්ෂේපණයක්,

(ii) $\mathbb{Z}$ සිට $\mathbb{N}$ ට ඇති සමක්ෂේපණයක්,

(iii) $\mathbb{R}$ සිට $(0, \infty)$ ට ඇති සමක්ෂේපණයක්,

(iv) $[0,1]$ සිට $[-1,1]$ ට ඇති සමක්ෂේපණයක්,

(b) පහත සඳහන් එක් එක් ශ්‍රිතය මතට ශ්‍රිතයක් දැයි සොයන්න. ඔබේ පිළිතුර පැහැදිලි කරන්න.

(i) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x + 1$

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$

(c) $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ යනු $f(x) = \frac{1+x}{2-x}$, වන සේ ඇති ශ්‍රිතයකි. f හි පරාසය සොයන්න.

4. (i) x සහ y නිඛිල වේ. xy ඔත්තේ නම් x ඔත්තේ සහ y ඔත්තේ බව සාධනය කරන්න.

(ii) x යනු නිඛිලයකි. x යනු 3 හි ගුණාකාරයක් නොවේ නම් එවිට $x^2 + 2$ 3 හි ගුණාකාරයක් බව සාධනය කරන්න.

(iii) $6n + 1$, 5 හේ ගුණාකාරයක් වන පරිදි $n \in \mathbb{N}$ අනන්ත සංඛ්‍යාවක් පවතින බව සාධනය කරන්න.

(iv) p යනු 3 ට වැඩි ප්‍රථමක සංඛ්‍යාවක් නම් p යනු $6k + 1$ හෝ $6k + 5$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි k යනු ධන නිඛිලයකි.

5. (a) (i) පරිමේය සංඛ්‍යා දෙකක එකතුව පරිමේය බව සාධනය කරන්න.

(ii) පරිමේය සංඛ්‍යාවක සහ අපරිමේය සංඛ්‍යාවක එකතුව අපරිමේය බව සාධනය කරන්න.

(iii) α, β යනු අපරිමේය සංඛ්‍යා වේ. $\alpha + \beta$ අපරිමේය හෝ $\alpha + 2\beta$ අපරිමේය වන බව සාධනය කරන්න.

(b) පහත සඳහන් දෑ සාධනය හෝ නිසාධනය කරන්න.

(i) ඕනෑම ධන අපරිමේය සංඛ්‍යා දෙකක එකතුව අපරිමේය වේ.

(ii) α අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් නම් $\alpha(\alpha + 1)$ අපරිමේය වේ.

6. (a) (i) $\mathbb{R}$ හි පූර්ණතා ප්‍රත්‍යක්ෂය ප්‍රකාශ කරන්න.

(ii) කුලකයකට සුපරිතමයක් (අඩුතම උඩත් පර්යන්තය) ඇත්නම් එය අනන්‍ය බව සාධනය කරන්න.

(b) $A = [0\,,3)$ වේ. $supA$ සොයන්න.

(c) $A = \left\{\frac{n}{n+1}:\ n \in \mathbb{N}\right\}$ සහ $B = \left\{\frac{n^2}{n+1}:\ n \in \mathbb{N}\right\}$ වේ.

(i) එක් එක් A සහ B කුලක සඳහා වැඩිතම අවයව නැති බව සාධනය කරන්න.

(ii) එක් එක් A, B කුලක සඳහා සුපිරිතමය පවතීද? එසේ නම් ඒවා සොයන්න. ඔබේ පිළිතුර පැහැදිලි කරන්න. පවතී නම් එය සොයන්න.

002

The Open University of Sri Lanka
B.Sc/B.Ed. DEGREE PROGRAMME
Final Examination 2017/2018
Level 03 Pure Mathematics
PEU3301/PUU1141 Foundations of Mathematics

Duration: - Two Hours

Date: - 29-03-2019 **Time: 9:30 a.m. to 11:30 a.m.**

Answer four questions only.

1. (a) (i) Let $A = \{\{1\}, \phi, 1\}$. Carefully write down the set $\mathcal{P}(A)$, the power set of A.

   (ii) Let $A_n = \{m \in \mathbb{N} : m \leq n\}$ and $B_n = \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\}$ for $n \in \mathbb{N}$. Find $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ and $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

   (iii) Express the set $((3, \infty) \setminus [4,5]) \cap \{4\}$ as union of intervals.

   (iv) Let $A_n = \left\{\left(0, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ be a family of intervals. Find $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ and $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

   (v) Let $A = \left\{\frac{m}{n} : m < n,\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$ and $B = \left\{\frac{m}{n} : m \leq n,\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

   Write down the set $B \setminus A$ by listing its elements.

   (b) Let P be a sub set of $\mathbb{Q}$ with the following properties ;

   A1: $-2 \in P$ and $2 \in P$

   A2: If $a, b \in P$ then $\frac{a+b}{2} \in P$.

   Prove that $\frac{1}{32} \in P$ and $\frac{7}{8} \in P$.

2. (a) Find whether each of the following relations on $\mathbb{Z}$ is an equivalence relation. Justify your answer.

   (i) xRy if $x^2 - y^2$ is a multiple of 3.

   (ii) xRy if $x^2 + y^2$ is a multiple of 3.

00

(b) Let $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ be the set of all sub sets of $\mathbb{Z}$ .Let R be a relation defined on $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ by ARB if $A \subseteq B$ for each $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Prove that R is a partial order in $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Is R a total order? Justify your answer.

(c) Prove that for each real number x, if $x > 0$ and $x \neq 1$ then $\frac{1}{x(1-x)} \geq 4$.

3. (a) Give an example for each of the following;
   (i) A bijection from $\mathbb{N}$ to $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$,
   (ii) A bijection from $\mathbb{Z}$ to $\mathbb{N}$,
   (iii) A bijection from $\mathbb{R}$ to $(0, \infty)$,
   (iv) A bijection from $[0,1]$ to $[-1,1]$.

   (b) Determine whether each of the following function is a surjection. Justify your answer.
   (i) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x + 1$
   (ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$

   (c) Let $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ be the function given by $f(x) = \frac{1+x}{2-x}$. Find the range of f.

4. (i) Let x and y be integers. Prove that if xy is odd, then x is odd and y is odd.
   (ii) Let x be an integer. Prove that if x is not a multiple of 3, then $x^2 + 2$ is a multiple of 3.
   (iii) Prove that there are infinitely many $n \in \mathbb{N}$ such that $6n + 1$ is a multiple of 5.
   (iv) Prove that if p is a prime number greater than 3, then p is of the form $6k + 1$ or $6k + 5$, where k is a positive integer.

5. (a) (i) Prove that sum of two rational numbers is rational.
   (ii) Prove that sum of a rational number and irrational number is irrational.
   (iii) Let α, β be irrational numbers. Prove that $\alpha + \beta$ is irrational or $\alpha + 2\beta$ is irrational.

   (b) Prove or disprove the following;
   (i) Sum of any two positive irrationals is irrational.
   (ii) If α is irrational then $\alpha(\alpha + 1)$ is irrational.

00040

6. (a) (i) State the Completeness Axiom for $\mathbb{R}$.

(ii) Prove that if a set has a supremum (least upper bound) then it is unique.

(b) Let $A = [0,3)$. Find $supA$.

(c) Let $A = \left\{\frac{n}{n+1} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ and $B = \left\{\frac{n^2}{n+1} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$

(i) Prove that each of the sets A and B does not have a maximum.

(ii) Does the supremum exist for each of the sets A and B? Justify your answer. Find the supremum if it exists.

00049

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞானமாணி/ கல்விமாணிப் பட்டப் பாடநெறி
இறுதிப் பரீட்சை – 2017/2018
தூய கணிதம் – மட்டம் 03
PEU3301/ PUU1141 – கணிதத்தின் அடிப்படை
காலம் :- இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

நாள் :- 29-03-2019 | நேரம் :- மு.ப 9.30 – மு.ப 11.30

நான்கு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

1. (a) (i) $A=\{\{1\},\ \phi,1\}$ என்க. A இன் வலுத்தொடை $\mathcal{P}(A)$ ஐ அவதனமாக எழுதுக.

(ii) $n\in\mathbb{N}$ இற்கு $A_n=\{m\in\mathbb{N}: m\leq n\}$ மற்றும் $B_n=\{m\in\mathbb{N}: m\geq n\}$ என்க.

$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ மற்றும் $\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$ என்பவற்றைக் காண்க.

(iii) $((3,\infty)\setminus[4,5])\cap\{4\}$ என்னும் தொடையை ஆயிடைகளினுடைய ஒன்றிப்பாக தருக.

(iv) $A_n=\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right):n\in\mathbb{N}\right\}$ என்பது ஆயிடைகளின் ஒரு குடும்பம் என்க. $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ மற்றும் $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ என்பவற்றைக் காண்க.

(v) $A=\left\{\frac{m}{n}:\ m<n,\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$ மற்றும் $B=\left\{\frac{m}{n}:\ m\leq n,\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$ என்க. மூலகங்களை பட்டியல் படுத்துவதன் மூலம் $B\setminus A$ என்னும் தொடையை எழுதுக.

(b) பின்வரும் பண்புகளுடன் P யானது $\mathbb{Q}$ வின் ஒரு உபதொடை என்க;

A1: $-2\in P$ மற்றும் $2\in P$ ஆகும்.

A2: $a,b\in P$ எனின், $\frac{a+b}{2}\in P$ ஆகும்.

$\frac{1}{32}\in P$ மற்றும் $\frac{7}{8}\in P$ என நிறுவுக.

2. (a) பின்வரும் ஒவ்வொரு தொடர்பும் $\mathbb{Z}$ இல் சமவன்மை தொடர்பொன்றா அல்லது இல்லையா எனக் காண்க. உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(i) x^2-y^2 என்பது 3 இன் ஒரு மடங்கு எனின் xRy ஆகும்.
(ii) x^2+y^2 என்பது 3 இன் ஒரு மடங்கு எனின் xRy ஆகும்.

(b) $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ என்பது $\mathbb{Z}$ இன் எல்லா உபதொடைகளினதும் தொடை என்க. ஒவ்வொரு $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ களிற்கும் $A \subseteq B$ எனின் R ஆனது $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ இல் ARB என வரையறுக்கப்படும் ஒரு தொடர்பு என்க. R என்பது $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ இன் ஒரு பகுதிவரிசையாக்கம் என நிறுவுக.

R என்பது ஒரு மொத்த வரிசையாக்கமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(c) ஒவ்வொரு மெய் எண் x இற்கும், $x > 0$ மற்றும் $x \neq 1$ எனின் $\frac{1}{x(1-x)} \geq 4$ என நிறுவுக.

3. (a) பின்வரும் ஒவ்வொன்றிற்கும் உதாரணமொன்றைத் தருக;

(i) $\mathbb{N}$ இருந்து $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ வரை ஒரு பைஜெக்‌ஷன் (bijection),

(ii) $\mathbb{Z}$ இருந்து $\mathbb{N}$ வரை ஒரு பைஜெக்‌ஷன் (bijection),

(iii) $\mathbb{R}$ இருந்து $(0, \infty)$ வரை ஒரு பைஜெக்‌ஷன் (bijection),

(iv) $[0,1]$ இருந்து $[-1, 1]$ வரை ஒரு பைஜெக்‌ஷன் (bijection).

(b) பின்வரும் ஒவ்வொரு சார்பும் சர்ஜெக்‌ஷன்(surjection) ஒன்றா எனத் துணிக. உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(i) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x + 1$

(ii) $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$

(c) $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ என்பது $f(x) = \frac{1+x}{2-x}$ என்பதால் தரப்படும் சார்பு என்க. f இன் வீச்சைக் காண்க.

4. (i) x மற்றும் y என்பன நிறை எண்கள் என்க. xy ஒற்றை எனின் x ஒற்றை மற்றும் y ஒற்றை என நிறுவுக.

(ii) x ஒரு நிறை எண் என்க. x ஆனது 3 இன் ஒரு மடங்கு இல்லை எனின், $x^2 + 2$ என்பது 3 இன் ஒரு மடங்கு ஆகும் என நிறுவுக.

(iii) $6n + 1$ என்பது 5 இன் ஒரு மடங்கு ஆகுமாறு முடிவற்ற பல $n \in \mathbb{N}$ கள் உண்டு என நிறுவுக.

(iv) p என்பது 3 இனை விட கூடிய முதன்மை எண் எனின், p யானது $6k + 1$ அல்லது $6k + 5$ என்னும் வடிவத்தில் இருக்கும் என நிறுவுக, இங்கு k ஒரு நேர் நிறை எண் ஆகும்.

5. (a) (i) இரண்டு விகிதமுறு எண்களின் கூட்டுத்தொகை ஆனது விகிதமுறும் என நிறுவுக.

(ii) ஒரு விகிதமுறும் எண் மற்றும் விகிதமுறா எண் என்பனவற்றின் கூட்டுத்தொகை ஆனது விகிதமுறாதது என நிறுவுக.

(iii) α, β என்பது விகிதமுறா எண்கள் என்க. $\alpha + \beta$ என்பது விகிதமுறாதது அல்லது $\alpha + 2\beta$ என்பது விகிதமுறாதது என நிறுவுக.

(b) பின்வருவன உண்மையென அல்லது பொய்யென நிறுவுக.

(i) ஏதாவது இரண்டு நேர் விகிதமுறா எண்களின் கூட்டுத்தொகை ஆனது விகிதமுறாதது.

(ii) α ஒரு விகிதமுறாதது எனின் $\alpha(\alpha+1)$ என்பது விகிதமுறாததாகும்.

6. (a) (i) $\mathbb{R}$ இற்கான முழுமையான (Completeness) வெளிப்படையுண்மையைக் கூறுக.

(ii) தொடை ஒன்றானது சுப்ரீமம் (Supremum- மிகச்சிறிய மேல் வரைப்பு) ஒன்றைக் கொண்டிருப்பின் அது தனித்துவமானது என நிறுவுக.

(b) $A = [0\,,3)$ என்க. $supA$ ஐக் காண்க.

(c) $A = \left\{\frac{n}{n+1} :\ n \in \mathbb{N}\right\}$ மற்றும் $B = \left\{\frac{n^2}{n+1} :\ n \in \mathbb{N}\right\}$ என்க

(i) ஒவ்வொரு A மற்றும் B என்னும் தொடைகள் உயர்வொன்றைக் கொண்டிருக்கவில்லை என நிறுவுக.

(ii) ஒவ்வொரு தொடை A மற்றும் B என்பனவற்றிக்கு சுப்ரீமம் (Supremum) உண்டா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

அவ்வாறு இருப்பின் அதன் சுப்ரீமத்தைக் (Supremum) காண்க.