இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்

விஞ்ஞான இளமாணி/கல்வியல் இளமாணி பட்டப்படிப்பு, தொடர் கற்கை நெறி

இறுதிப் பரீட்சை - 2019/2020

மட்டம் 03 தூய கணிதம்

PEU3202/ PUU1142 காவி வெளிகள்

காலம் : - இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

திகதி: - **18-02-2021** நேரம்: - **1.30 p.m to 3.30 p.m**

நான்கு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

1.

(a) F என்னும் புலமொன்றின் மேல் V ஆனது ஒரு காவிவெளி எனக் கொள்க. சில $\alpha \in F-\{0\}$, இற்கு $\alpha(x+y)=\alpha(x+z)$ எனின் எல்லா $x, y, z \in V$ இற்கும் $y=z$ என நிறுவுக.

(b) கீழுள்ள (i) மற்றும் (ii) செய்கைகளின் அடிப்படையில் $\mathbb{R}$ என்னும் புலத்தில் $\mathbb{R}^2$ என்னும் தொடையானது ஒரு காவிவெளி அல்ல எனக் காட்டுக.

எல்லா $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ மற்றும் $\alpha \in \mathbb{R}$ இற்கு

(i) $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (0, a_2 + b_2)$; $\alpha(a_1, b_1) = (a_1, b_1)$,

(ii) $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$; $\alpha(a_1, b_1) = (\alpha^2 a_1, \alpha^2 b_1)$.

(c) வழமையான கூட்டல் மற்றும் எண்ணி பெருக்கத்துக்கு அமைவாக தொடை $V = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{N}\}$ ஆனது $\mathbb{R}$ என்னும் புலத்தின் மேல் $\mathbb{R}^2$ இன் ஒரு உபவெளியா எனத் துணிக.

2.

(a) F என்னும் புலமொன்றின் மேல் W_1 மற்றும் W_2 என்பன ஒரு காவிவெளி V இன் உபவெளிகள் எனக் கொள்க.

(i) F என்னும் புலத்தின் மேல் $W_1 \cap W_2$ என்பது காவிவெளி V இன் உபவெளி என நிறுவுக.

(ii) $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 | w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ என வரையருக்கப்பட்டுள்ளது. F என்னும் புலத்தின் மேல் $W_1 + W_2$ என்பது காவிவெளி V இன் ஒரு உபவெளி எனக் நிறுவுக.

(b) $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ என்பன ஏகபரிமாணமாய் சார்ந்தவைகளெனின் $a_1 b_2 = a_2 b_1$ என நிறுவுக, இங்கு வழமையான கூட்டல் மற்றும் எண்ணி பெருக்கத்துக்கு அமைவாக புலம் $\mathbb{R}$ இன் மேல் $\mathbb{R}^2$ ஒரு காவிவெளி என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

3.

(a) F என்னும் புலமொன்றின் மேல் V ஆனது ஒரு காவிவெளி மற்றும் S ஆனது V இல் ஆனியமற்ற ஒரு உபதொடை என்க. $L_s = Sp < S >$ ஆனது S ஐக் கொண்டுள்ள V இன் மிக சிறிய உபவெளி என நிறுவுக.

(b) W ஆனது F என்னும் புலமொன்றின் மேல் ஒரு முடிவுள்ள பரிமாணத்தைக் கொண்ட காவிவெளி V இன் ஒரு உபவெளி எனின், $\dim W = \dim V$ என்றால் என்றால் மட்டும் $W = V$ என நிறுவுக.

4.

$V = \mathbb{R}^3$ மற்றும் $W = \mathbb{R}^2$ என்க. வழமையான கூட்டல் மற்றும் எண்ணி பெருக்கத்துக்கு அமைவாக புலம் $\mathbb{R}$ இன் மேல் V மற்றும் W என்பன காவிவெளிகள் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

$T : V \to W$ என்னும் படமாக்கமானது $T(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z)$ இனால் வரையறுக்கப்படுகிறது என கருதுக.

(i) T ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றம் எனக் காட்டுக.

(ii) T இன் அகணியைக் காண்க.

(iii) T ஒரு சம உருவாக்கமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(iv) T இன் விம்பத்தை காண்க. T இன் விம்பமானது காவிவெளி W இன் உபவெளி என நிறுவுக.

5.

(a) F என்னும் புலமொன்றின் மேல் V மற்றும் W என்பன காவிவெளிகள் ஆகும் மற்றும் $T : V \to W$ ஒரு ஏகபரிமாண உருமாற்றமாகும். எல்லா $x \in V$ இற்கும் $T(-x) = -T(x)$ என நிறுவுக.

(b) $V = \mathbb{R}^3$ என்க. வழமையான கூட்டல் மற்றும் எண்ணி பெருக்கத்துக்கு அமைவாக புலம் $\mathbb{R}$ இன் மேல் V ஒரு காவிவெளி என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

$T : V \to V$ என்ற ஏகபரிமாண உருமாற்றம் $T(a, b, c) = (c, b, a)$ என வரையருக்கப்பட்டுள்ளது. T இன் கீழ் $\mathbb{R}$ என்னும் புலத்தின் மீது பின்வரும் தொடைகள் காவிவெளி V இன் மாற்றமில் உபவெளிகளா என ஆராய்ந்து பார்க்க.

(i) $U = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$,

(ii) $W = \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

(c) $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ என்க இங்கு $u, v \in \mathbb{R}^3$ ஆகும்.

$< u, v > = x_1^2 - x_2^2 - x_1 x_3$ என வரையருக்கப்பட்டுள்ளது. $\mathbb{R}^3$ இன் மேல் $< u, v >$ ஒரு உட்பெருக்கமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

6.

(a) *ஊக்கிளிட்டு வெளியை* வரையருக்க.

(b) சுவாசின் சமனிலியை கூறி நிறுவுக.

(c) $u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (1, -1, 2)$ மற்றும் $u_3 = (1, 0, 1)$ என்பன வழமையான ஊக்களிட்டு மூவெளி E^3 இற்கான ஒரு அடிமூலத்தை உருவாக்கும் எனக் காட்டுக.

கிராம்சிமிற்றர் செயற்பாட்டை பயன்படுத்தி $\{u_1, u_2, u_3\}$ இதிலிருந்து E^3 இற்கான நிமிர்செவ்வனடி மூலம் ஒன்றை அமைக்க.