ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යාවේදී/ අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව
අවසාන පරීක්ෂණය - 2019/2020
ශුද්ධ ගණිතය - තුන්වන මට්ටම
PEU3202/PUU1142 – දෛශික අවකාශ

කාලය පැය දෙකයි.

දිනය :- 18-02-2021 වේලාව : 1.30 p.m. to 3.30 p.m.

ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1.

(a) V යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයකි. යම්කිසි $\alpha \in F-\{0\}$ සඳහා $\alpha(x+y)=\alpha(x+z)$ නම්, සියලුම $x,y,z \in V$ සඳහා $y=z$ බව සාධනය කරන්න.

(b) පහත දැක්වෙන (i) සහ (ii) අර්ථ දැක්වීම් යටතේ $\mathbb{R}^2$ යනු $\mathbb{R}$ මත වූ දෛශික අවකාශයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

ඕනෑම $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in \mathbb{R}^2$ සහ $\alpha \in \mathbb{R}$ සඳහා

(i) $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(0,a_2+b_2)$; $\alpha(a_1,b_1)=(a_1,b_1)$

(ii) $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$; $\alpha(a_1,b_1)=(\alpha^2 a_1,\alpha^2 b_1)$

(c) $V=\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N}\}$ කුලකය සුපුරුදු එකතුව සහ අදිශ ගුණිතය යටතේ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ $\mathbb{R}^2$ දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශ වේදැයි සොයන්න.

2.

(a) W_1 සහ W_2 යනු V යන F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශ නම්

(i) $W_1 \cap W_2$ යනු V යන F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශයක් බව සාධනය කරන්න.

(ii) $W_1+W_2=\{w_1+w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ මගින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ. W_1+W_2 යනු V යන F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශයක් බව සාධනය කරන්න.

(b) සුපුරුදු එකතුව සහ අදිශ ගුණිතය යටතේ $\mathbb{R}^2$ යනු $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෙඝික අවකාශයක් වේ. $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ ඒකජව ස්වායත්ත නම් $a_1 b_2 = a_2 b_1$ බව සාධනය කරන්න.

3.

(a) V යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෙඝික අවකාශයකි. S යනු අභිශූන්‍ය නොවන V හි උප කුලකයකි. $L_s = Sp < S >$ යනු S අන්තර්ගතවන V හි කුඩාම උප අවකාශය බව සාධනය කරන්න.

(b) V යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ පරිමිත මාන දෙඝික අවකාශයකි. W යනු V හි උප අවකාශයක් වේ.

$W = \dim V$ නම් හා නම්ම පමනක් $W = V$ බව සාධනය කරන්න.

4

$V = \mathbb{R}^3$ සහ $W = \mathbb{R}^2$ ලෙස ගනිමු. V සහ W සුපුරුදු එකතුව සහ අදිශ ගුණිතය යටතේ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෙඝික අවකාශවේ.

$T : V \to W$ යනු $T(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z)$ මඟින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ.

(i) T ඒකජ පරිනාමණයක් බව පෙන්වන්න.
(ii) T හි මදය සොයන්න.
(iii) T යනු සමරූපිතාවයක්ද? ඔබේ පිළිතුර සනාත කරන්න.
(iv) T හි ප්‍රතිබිම්බය සොයන්න. T හි ප්‍රතිබිම්බය W උප අවකාශයක් බව සාධනය කරන්න.

5.

(a) V සහ W යනු F ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෙඝික අවකාශවේ. $T : V \to W$ ඒකජ පරිනාමණයක්වේ. සියලුම $x \in V$ සඳහා $T(-x) = -T(x)$ බව සාධනය කරන්න.

(b) $V = \mathbb{R}^3$ ලෙස ගනිමු. V සුපුරුදු එකතුව සහ අදිශ ගුණිතය යටතේ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෙඝික අවකාශයක් වේ.

$T : V \to V$ යනු $T(a, b, c) = (c, b, a)$ මඟින් අර්ථ දක්වන ඒකජ පරිනාමණය වේ.

පහත දැක්වෙන කුලක අතරින් කවරක් T යටතේ $\mathbb{R}$ ක්ෂේත්‍රය මත වූ දෙඝික අවකාශයේ අවිචලක උප අවකාශයක් වේද යන්න සොයන්න.

(i) $U = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
(ii) $W = \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

(c) $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ ලෙස ගනිමු ; $u, v \in \mathbb{R}^3$ වේ.
$< u, v > = {x_1}^2 - {x_2}^2 - x_1 x_3$ මගින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ. $< u, v >$ යනු $\mathbb{R}^3$ මත අන්තර් ගුණිත අවකාශයක්ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

6.

(a) යුක්ලීඩීය දෛශික අවකාශය අර්ථ දක්වන්න .

(b) Schwarz අසමානතාවය (Schwarz inequality) සඳහන් කර සාධනය කරන්න..

(c) $u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (1, -1, 2)$ සහ $u_3 = (1, 0, 1)$ යන දෛශික සුපුරුදු යුක්ලීඩීය දෛශික අවකාශයෙහි පදනමක් බව පෙන්වන්න. the Gram–Schmidt ප්‍රාහිලම්භ ක්‍රියාවලිය මගින් $\{u_1, u_2, u_3\}$, E^3 හි ප්‍රාහිලම්භ පදනමක් බවට පරිනාමණය කරන්න.