ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
ස්වභාවික විද්‍යා පීඨය
විද්‍යාවේදී / අධ්‍යාපනවේදී උපාධි පාඨමාලාව

දෙපාර්තමේන්තුව	: ගණිතය
මට්ටම	: 03
විභාගයේ නම	: අවසාන පරීක්ෂණය
පාඨමාලාවේ නම සහ කේතය	: තර්ක ශාස්ත්‍රය සහ ගණිත සාධන – PEU3300
අධ්‍යන වර්ෂය	: 2021/2022
දිනය	: 23.10.2022
කාලය	: 09.30 am – 11.30 am
කාල සීමාව	: පැය 02 යි.

සාමාන්‍ය උපදෙස්

1. ප්‍රශ්න වලට පිළිතුරු දීමට පෙර සියලු උපදෙස් හොඳින් කියවන්න.
2. මෙම පත්‍රිකාව **A** කොටස සහ **B** කොටස යන කොටස් දෙකකින් සමන්විත වන අතර **A** කොටස අනිවාර්යය වන අතර එය ව්‍යූහාත්මක රචනා ප්‍රශ්න පහකින් සමන්විත වේ. එක් එක් ප්‍රශ්නය යටතේ ඇති අවකාශය තුළ ඔබ පිළිතුරු දිය යුතුය. **B** කොටස රචනා ප්‍රශ්න පහකින් සමන්විත වන අතර එයින් තුනකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
3. B කොටසේ සෑම ප්‍රශ්නයකටම පිළිතුර නව පිටුවකින් ආරම්භ විය යුතුය.
4. සෑම ප්‍රශ්නයකටම ලකුණු **100** බැගින් හිමි වේ.
5. මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය පිටු **05** කින් සමන්විත වේ.
6. විභාග වරදක් ලෙස සලකන ඕනෑම ක්‍රියාවකට සම්බන්ධ වීම දඩුවමට හේතු වේ.
7. ප්‍රශ්න වලට පිළිතුරු දීමට නිල් හෝ කළු තීන්ත භාවිතා කරන්න.
8. ඔබේ උත්තර පත්‍රයේ ඔබේ යොමු අංකය පැහැදිලිව සඳහන් කරන්න.
9. විභාගය අවසානයේ **A** කොටස පිළිතුරු පොතට අමුණා එය අධීක්ෂකවරයාට භාර දෙන්න.

The Open University of Sri Lanka
Faculty of Natural Sciences
B.Sc/B. Ed Degree Programme

Department	**: Mathematics**
Level	**: 03**
Name of the Examination	: Final Examination
Course Title and - Code	**: Mathematical Logic & Mathematical Proofs – PEU3300**
Academic Year	**: 2021/2022**
Date	**: 23.10.2022**
Time	**: 09.30 am – 11.30 am**
Duration	**: 02 hrs**

General Instructions

1. Read all instructions carefully before answering the questions.
2. This paper consists of **SIX questions in TWO** sections, Section **A** and Section **B**. Section A is compulsory and it consists of ONE question which has **EIGHT** parts which are Structured Essay Type.

   Answer for each part should be written in the space provided below it. Section **B** consists of **FIVE** Essay Type questions and answer only **THREE** of them.
3. Answer for each question in Section **B** should commence from a new page
4. Each question carries 100 marks.
5. This paper consists of 05 pages.
6. Involvement in any activity that is considered as an exam offence will lead to punishment
7. Use a blue or black ink pen to answer the questions.
8. Clearly state your index number in your answer script.
9. At the end of the exam, attach Section **A** to the answer booklet and hand over to the supervisor.

A කොටස

1. ලබා දී ඇති අවකාශයෙහි සියලුම ප්‍රශ්න වලට පිළිතුරු සපයන්න.

(a) පහත ප්‍රකාශයේ ප්‍රතිශේදය ලියන්න.

x ඉරට්ටේ හෝ y ඉරට්ටේ නම්, xy ඉරට්ටේ වේ.

(b) ඕනෑම නිඛිල දෙකක ගුණිතය ඉරට්ටේ වේ යන ප්‍රකාශයේ සත්‍ය අගය නිර්ණය කරන්න.
ඔබේ පිළිතුර පැහැදිලි කරන්න.

SECTION A

1. Answer all the questions in the space provided.

   (a) Write down the contraposition of the following statement.
   If x is even or y is even, then xy is even.

   (b) Determine the truth value of the statement, the product of any two integers is even.
   Justify your answer.

(c) $\sqrt{3}-1$ යන්න පරිමේය වේ හෝ 1 ප්‍රථමක සංඛ්‍යාවක් වේ යන ප්‍රකාශය සත්‍යද වේද?
ඔබේ පිළිතුර පැහැදිලි කරන්න.

(d) සියලුම නිඛිල සඳහා n, n යනු ඉරට්ටේ නම් සහ නම්ම පමණක් n^3 ඉරට්ටේ වේ යන ප්‍රකාශය සලකා බලන්න:
දී ඇති ප්‍රකාශයට තුල්‍යවන ප්‍රකාශයක් ලියන්න.

(e) පහත ප්‍රකාශයේ ඇති නිෂේධනය කුමක්ද ?
එක් එක් x තාත්වික සංඛ්‍යාවලට පවතී y තාත්වික සංඛ්‍යාවක් කෙසේදයත් $y^3 = x$ වන පරිදි.

(c) Is the statement $\sqrt{3}-1$ is rational or 1 is a prime number true? Justify your answer.

(d) Consider the statement: for all integers n, n is even if and only if n^3 is even.

Write down a statement equivalent to the given statement.

(e) What is the negation of the following statement?
For each real number x there is a real number y such that $y^3 = x$.

B කොටස

ප්‍රශ්න තුනකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

2. පහත සඳහන් එක් එක් ප්‍රකාශ සාධනය හෝ නිසාධනය කරන්න.

(a) පවතී x තාත්වික සංඛ්‍යාවක් කෙසේදයත් $x^2 = 5$.

(b) n^2 ඉරට්ටේ නම් n ඉරට්ටේ වේ.

(c) $\pi + 1$ යන්න පරිමේය වේ සහ $\pi - 1$ යන්න පරිමේය වේ.

(d) පවතී x තාත්වික සංඛ්‍යාවක් $x \geq 2$ කෙසේදයත් $x^2 + x - 6 < 0$.

(e) $a, b \in \mathbb{N}$ නම් $a + b < ab$ වේ.

3. (a) පහත ප්‍රතිපලය පිළිබඳ ඔප්පු කිරීමක් ලබා දී ඇත.

ප්‍රතිපලය: $n \in \mathbb{Z}$ සඳහා n^4 ඉරට්ටේ නම් $3n+1$ ඔත්තේ වේ.

ඔප්පු කිරීම: $n^4 = \left(n^2\right)^2$ ඉරට්ටේ යැයි උපකල්පනය කරන්න. n^4 ඉරට්ටේ නිසා n^2 ඉරට්ටේ වේ.

තවද, n^2 ඉරට්ටේ නිසා, ඉරට්ටේ වේ. n ඉරට්ටේ නිසා, සමහර නිඛිල k සඳහා $n = 2k$ වේ.

එවිට $3n + 1 = 3(2k) + 1 = 6k + 1 = 2(3k) + 1$ වේ. $3k$ යනු නිඛිල සංඛ්‍යාවක් බැවින්, $3n+1$ ඔත්තේ වේ.

පහත ප්‍රශ්න වලට පිළිතුරු සපයන්න.

1. මෙහි භාවිතා කරන්නේ කුමන සාධන ක්‍රමයද?
2. ආරම්භක උපකල්පනය කුමක්ද?
3. සාධනයෙහි පහත පියවර සඳහා හේතු දක්වන්න. ඔබේ පිළිතුර පැහැදිලි කරන්න.

n^4 ඉරට්ටේ නිසා, n^2 ඉරට්ටේ වේ.

(b) $3n+5$ ඔත්තේ නම්, n ඉරට්ටේ වන බව

(i) ආවස්ථික සාදන රීතිය සහිත සාධන ක්‍රමයෙන්,

(ii) ප්‍රතිශේදන සාදන රීතිය සහිත සාධන ක්‍රමයෙන්.

SECTION B

Answer **THREE** Questions **ONLY**.

2. Prove or disprove each of the following statements.

   (a) There exists a real number x such that $x^2 = 5$.

   (b) If n^2 is even, then n is even.

   (c) $\pi + 1$ is rational and $\pi - 1$ is rational.

   (d) There is a real number $x \geq 2$ such that $x^2 + x - 6 < 0$.

   (e) If $a, b \in \mathbb{N}$ then $a + b < ab$.

3. (a) A proof of the following result is given.

   Result: Let $n \in \mathbb{Z}$. If n^4 is even, then $3n+1$ is odd.

   Proof: Assume that $n^4 = \left(n^2\right)^2$ is even. Since n^4 is even, n^2 is even.

   Furthermore, since n^2 is even, n is even. Because n is even, $n = 2k$ for some integer k. Then $3n + 1 = 3(2k) + 1 = 6k + 1 = 2(3k) + 1$. Since $3k$ is an integer, $3n+1$ is odd.

   Answer the following questions.

   1. Which proof technique is being used?
   2. What is the starting assumption?
   3. Give a reason for the following step in the proof. Justify your answer.
      Since n^4 is even, n^2 is even.

   (b) Prove that, if $3n+5$ is an odd, then n is even, by the

   (i) Method of conditional proof,

   (ii) Method of proof by contraposition.

4. පහත සඳහන් එක් එක් ප්‍රකාශ සාධනය හෝ නිසාධනය කරන්න.

(a) පවතී x තාත්වික සංඛ්‍යාවක්, පවතී y තාත්වික සංඛ්‍යාවක් කෙසේදයත්, $x+y=2$.

(b) එක් එක් x තාත්වික සංඛ්‍යාවලට, පවතී y තාත්වික සංඛ්‍යාවක් y කෙසේදයත්, $x+y=2$.

(c) එක් එක් x තාත්වික සංඛ්‍යාවලට, එක් එක් y තාත්වික සංඛ්‍යාවලට කෙසේදයත්, $x+y=2$.

(d) පවතී x තාත්වික සංඛ්‍යාවක් කෙසේදයත් එක් එක් y තාත්වික සංඛ්‍යාවලට, $x+y=2$.

5. (a) n ඔත්තේ නම් $8 \mid (n^2+(n+6)^2+6)$ වන බව ඔප්පු කරන්න.

(b) සෑම සෘණ නොවන n නිඛිලයක් සඳහාම $3 \mid (4^{3n}-1)$ වන බව ඔප්පු කරන්න.

(c) පහත සඳහන් එක් එක් ප්‍රකාශ සාධනය හෝ නිසාධනය කරන්න.

(i) a සහ b ශූන්‍ය නොවන තාත්වික සංඛ්‍යා වේ. $x, y \in \mathbb{R}^+$ නම් $\frac{a^2}{2b^2}x^2+\frac{b^2}{2a^2}y^2 > xy$ වේ.

(ii) x ධන තාත්වික සංඛ්‍යාවක් වේ. $x-\frac{2}{x}>1$ නම් $x>2$ වේ.

6. (a) (i) අතාත්වික සංඛ්‍යාවක සහ ශූන්‍ය නොවන තාත්වික සංඛ්‍යාවක ගුණිතය අතාත්වික වේ.

(ii) a අතාත්වික සංඛ්‍යාවක් සහ r යනු ශූන්‍ය නොවන තාත්වික සංඛ්‍යාවක් වේ.
s යනු තාත්වික සංඛ්‍යාවක් නම්, $ar+s$ හෝ $ar-s$ අතාත්වික වේ.

(b) පහත ප්‍රකාශය නිසාධනය කරන්න.
පවතී n ඔත්තේ සංඛ්‍යාවක් කෙසේදයත් n^2+n+1 ඉරට්ටේ වන පරිදි.

4. Prove or disprove each of the following statements.

   (a) There exists a real number x, there exists a real number y such that $x+y=2$.

   (b) For each real number x, there exists a real number y such that $x+y=2$.

   (c) For each real number x, for each real number y such that $x+y=2$.

   (d) There exists a real number x such that for each real number y, $x+y=2$.

5. (a) Prove that if n is an odd integer, then $8 \mid (n^2+(n+6)^2+6)$.

   (b) Prove that for every non-negative integer n, $3 \mid (4^{3n}-1)$.

   (c) Prove or disprove each of the following statements.

   (i) Let a and b be non-zero real numbers. If $x, y \in \mathbb{R}^+$ then $\frac{a^2}{2b^2}x^2+\frac{b^2}{2a^2}y^2 > xy$.

   (ii) Let x be a positive real number. If $x-\frac{2}{x}>1$ then $x>2$.

6. (a) (i) Prove that the product of an irrational number and a nonzero rational number is irrational.

   (ii) Let a be an irrational number and r a nonzero rational number. Prove that if s is a real number, then either $ar+s$ or $ar-s$ is irrational.

   (b) Disprove the following statement.

   There exists an odd integer n such that n^2+n+1 is even.