075

இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
இயற்கை விஞ்ஞானங்கள் பீடம்
விஞ்ஞானமாணி/ கல்விமாணி பட்டப்பாடநெறி

திணைக்களம்	: கணிதம்
மட்டம்	: **03**
பரீட்சையின் பெயர்	: இறுதிப் பரீட்சை
கற்கையின் தலைப்பு மற்றும் குறியீடு	: கணித தர்க்கவியலும் கணித நிறுவல்களும் – **PEU3300**
கல்வி ஆண்டு	: **2021/2022**
திகதி	: **23.10.2022**
நேரம்	: மு.ப **09:30** – மு.ப **11:30**
காலம்	: இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

பொது அறிவுறுத்தல்கள்

1. வினாக்களுக்கு விடையளிக்கமுன் அனைத்து அறிவுறுத்தல்களையும் கவனமாக வாசிக்கவும்.
2. இவ் வினாப்பத்திரமானது பகுதி **A** மற்றும் பகுதி **B** என இரண்டு பகுதிகளில் ஆறு வினாக்களைக் கொண்டுள்ளது. பகுதி A கட்டாயமானது மற்றும் இது ஐந்து கட்டமைக்கப்பட்ட கட்டுரை வகைப் பகுதிகளுடனான ஒரு வினாவைக் கொண்டுள்ளது. ஒவ்வொரு பகுதிக்கும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இடத்தில் விடையை எழுத வேண்டும். பகுதி B யானது ஐந்து கட்டுரை வகையான வினாக்களைக் கொண்டுள்ளது அவற்றில் மூன்று வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்கவும்.
3. பகுதி B இற்குறிய ஒவ்வொரு வினாவுக் குமான விடையை ஒரு புதிய பக்கத்தில் ஆரம்பிக்கப்பட வேண்டும்.
4. ஒவ்வொரு வினாவுக்குமான புள்ளிகள் 100 ஆகும்.
5. இவ் வினாத்தாள் 05 பக்கங்களை கொண்டுள்ளது.
6. பரீட்சைக் குற்றமாக கருதப்படும் எந்தவொரு செயலிலும் ஈடுபடுவது தண்டனைக்கு வழிவகுக்கும்.
7. வினாக்களுக்கு விடையளிகையில் நீல அல்லது கருப்பு வண்ண மை பேனா ஒன்றை பயன்படுத்தவும்.
8. உங்களுடைய சுட்டெண்ணை உங்களுடைய விடைத்தாளில் தெளிவாக குறிப்பிடவும்.
9. பரீட்சையின் முடிவில் பகுதி A இனை உங்கள் விடை புத்தகத்துடன் இணைத்து மேற்பார்வையாளரிடம் ஒப்படைக்கவும்.

The Open University of Sri Lanka
Faculty of Natural Sciences
B.Sc/B. Ed Degree Programme

Department	**: Mathematics**
Level	**: 03**
Name of the Examination	: Final Examination
Course Title and - Code	**: Mathematical Logic & Mathematical Proofs – PEU3300**
Academic Year	**: 2021/2022**
Date	**: 23.10.2022**
Time	**: 09.30 am – 11.30 am**
Duration	**: 02 hrs**

General Instructions

1. Read all instructions carefully before answering the questions.
2. This paper consists of **SIX questions in TWO** sections, Section **A** and Section **B**. Section A is compulsory and it consists of ONE question which has **EIGHT** parts which are Structured Essay Type.

   Answer for each part should be written in the space provided below it. Section **B** consists of **FIVE** Essay Type questions and answer only **THREE** of them.
3. Answer for each question in Section **B** should commence from a new page
4. Each question carries 100 marks.
5. This paper consists of 05 pages.
6. Involvement in any activity that is considered as an exam offence will lead to punishment
7. Use a blue or black ink pen to answer the questions.
8. Clearly state your index number in your answer script.
9. At the end of the exam, attach Section **A** to the answer booklet and hand over to the supervisor.

பகுதி A

1. எல்லா வினாக்களுக்கும் தரப்பட்டுள்ள இடங்களில் விடையளிக்குக.

(a) பின்வரும் கூற்றின் எதிர்வைப்பை எழுதுக.
x இரட்டை அல்லது y இரட்டை எனின், xy இரட்டை ஆகும்.

(b) யாதாயினும் இரண்டு முழுவெண்களின் பெருக்கம் இரட்டையாகும் என்னும் கூற்றின் உண்மைத் தன்மையைத் துணிக,
உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

SECTION A

1. Answer all the questions in the space provided.

   (a) Write down the contraposition of the following statement.
   If x is even or y is even, then xy is even.

   (b) Determine the truth value of the statement, the product of any two integers is even.
   Justify your answer.

(c) $\sqrt{3}-1$ விகிதமுறும் அல்லது 1 ஒரு முதன்மை எண்ணாகும் என்னும் கூற்று உண்மையானதா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(d) அனைத்து முழுவெண்கள் n இற்கும், n இரட்டை என்றால் என்றால் மட்டும் n^3 இரட்டையாகும் என்னும் கூற்றைக் கருதுக:

தரப்பட்டுள்ள கூற்றுக்கு சமவலுவான கூற்றொன்றை எழுதுக.

(e) பின்வரும் கூற்றின் மறுப்பு என்ன?
$y^3 = x$ என ஆகுமாறு ஒவ்வொரு மெய் எண் x இற்கும் ஒரு மெய் எண் y உண்டு.

(c) Is the statement $\sqrt{3}-1$ is rational or 1 is a prime number true? Justify your answer.

(d) Consider the statement: for all integers n, n is even if and only if n^3 is even.

Write down a statement equivalent to the given statement.

(e) What is the negation of the following statement?
For each real number x there is a real number y such that $y^3 = x$.

பகுதி **B**

மூன்று வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்குக.

2. பின்வரும் கூற்றுக்கள் ஒவ்வொன்றையும் சரி அல்லது பிழை என நிறுவுக.

(a) $x^2 = 5$ என ஆகுமாறு ஒரு மெய் எண் x உண்டு.

(b) n^2 இரட்டை எனின், n இரட்டை ஆகும்.

(c) $\pi + 1$ விகிதமுறும் மற்றும் $\pi - 1$ விகிதமுறும்.

(d) $x^2 + x - 6 < 0$ என ஆகுமாறு ஒரு மெய் எண் $x \geq 2$ உண்டு.

(e) $a, b \in \mathbb{N}$ எனின், $a + b < ab$ ஆகும்.

3. (a) பின்வரும் பெறுபேற்றின் நிறுவல் ஒன்று தரப்பட்டுள்ளது.

பெறுபேறு: $n \in \mathbb{Z}$ என்க. n^4 இரட்டை எனின், $3n+1$ ஒற்றை ஆகும்.

நிறுவல்: $n^4 = \left(n^2\right)^2$ இரட்டை என கருதுக. n^4 என்பது இரட்டை என்பதால், n^2 இரட்டையாகும்.

மேலும், n^2 என்பது இரட்டை என்பதால், n இரட்டையாகும். n இரட்டையாக இருப்பதால், சில முழுவெண் k இற்கு $n = 2k$ ஆகும்.

எனவே, $3n + 1 = 3\left(2k\right) + 1 = 6k + 1 = 2\left(3k\right) + 1$ ஆகும். $3k$ என்பது முழுவெண் என்பதால், $3n+1$ ஒற்றை ஆகும்.

பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடை தருக.

1. எந்த நிறுவல் முறை பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது?
2. ஆரம்ப எடுகோள் என்ன?
3. நிறுவலில் பின்வரும் படிக்கான ஒரு காரணத்தைத் தருக. உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

n^4 என்பது இரட்டை என்பதால், n^2 இரட்டையாகும்.

(b) $3n+5$ என்பது ஒற்றை எனின், n இரட்டை ஆகும் என்பதை

(i) நிபந்தனை நிறுவல் முறை,

(ii) எதிர்வைப்பு நிறுவல் முறை மூலம் நிறுவுக.

SECTION B

Answer **THREE** Questions **ONLY**.

2. Prove or disprove each of the following statements.

   (a) There exists a real number x such that $x^2 = 5$.

   (b) If n^2 is even, then n is even.

   (c) $\pi + 1$ is rational and $\pi - 1$ is rational.

   (d) There is a real number $x \geq 2$ such that $x^2 + x - 6 < 0$.

   (e) If $a, b \in \mathbb{N}$ then $a + b < ab$.

3. (a) A proof of the following result is given.

   Result: Let $n \in \mathbb{Z}$. If n^4 is even, then $3n+1$ is odd.

   Proof: Assume that $n^4 = \left(n^2\right)^2$ is even. Since n^4 is even, n^2 is even.

   Furthermore, since n^2 is even, n is even. Because n is even, $n = 2k$ for some integer k. Then $3n + 1 = 3(2k) + 1 = 6k + 1 = 2(3k) + 1$. Since $3k$ is an integer, $3n+1$ is odd.

   Answer the following questions.

   1. Which proof technique is being used?
   2. What is the starting assumption?
   3. Give a reason for the following step in the proof. Justify your answer.
      Since n^4 is even, n^2 is even.

   (b) Prove that, if $3n+5$ is an odd, then n is even, by the

   (i) Method of conditional proof,

   (ii) Method of proof by contraposition.

4. பின்வரும் கூற்றுக்கள் ஒவ்வொன்றையும் சரி அல்லது பிழை என நிறுவுக.

(a) $x + y = 2$ லன ஆகுமாறு ஒரு மெய் எண் x இற்கு, ஒரு மெய் எண் y உண்டு.

(b) $x + y = 2$ என ஆகுமாறு ஒவ்வொரு மெய் எண் x இற்கும், ஒரு மெய் எண் y உண்டு.

(c) $x + y = 2$ என ஆகுமாறு ஒவ்வொரு மெய் எண் x இற்கும், ஒவ்வொரு மெய் எண் y உண்டு.

(d) ஒவ்வொரு மெய் எண் y இற்கும், $x + y = 2$ என ஆகுமாறு ஒரு மெய் எண் x உண்டு.

5. (a) n ஒரு ஒற்றை முழுவெண் எனின், $8 \mid (n^2 + (n+6)^2 + 6)$ என நிறுவுக.

(b) ஒவ்வொரு மறை அல்லாத முழுவெண் n இற்கும், $3 \mid (4^{3n} - 1)$ என நிறுவுக.

(c) பின்வரும் கூற்றுக்கள் ஒவ்வொன்றையும் சரி அல்லது பிழை என நிறுவுக.

(i) a மற்றும் b பூச்சியமல்லா மெய் எண்கள் என்க. $x, y \in \mathbb{R}^+$ எனின்

, $\frac{a^2}{2b^2}x^2 + \frac{b^2}{2a^2}y^2 > xy$ ஆகும்.

(ii) x ஒரு நேர் மெய் எண் என்க. $x - \frac{2}{x} > 1$ எனின் $x > 2$ என நிறுவுக.

6. (a) (i) ஒரு விகிதமுறாத எண்ணினதும் மற்றும் ஒரு பூச்சியமல்லா விகிதமுறும் எண்ணினதும் பெருக்கம் விகிதமுறாதது என நிறுவுக.

(ii) a ஒரு விகிதமுறாத எண் மற்றும் r ஒரு பூச்சியமல்லா விகிதமுறும் எண் என்க. s ஒரு மெய் எண் எனின், $ar + s$ அல்லது $ar - s$ இரண்டில் ஒன்று விகிதமுறாதது என நிறுவுக.

(b) பின்வரும் கூற்று பிழை என நிறுவுக.

$n^2 + n + 1$ இரட்டை ஆகுமாறு ஒரு ஒற்றை முழுவெண் n உண்டு.

4. Prove or disprove each of the following statements.

(a) There exists a real number x, there exists a real number y such that $x+y=2$.

(b) For each real number x, there exists a real number y such that $x+y=2$.

(c) For each real number x, for each real number y such that $x+y=2$.

(d) There exists a real number x such that for each real number y, $x+y=2$.

5. (a) Prove that if n is an odd integer, then $8 \mid (n^2+(n+6)^2+6)$.

(b) Prove that for every non-negative integer n, $3 \mid (4^{3n}-1)$.

(c) Prove or disprove each of the following statements.

(i) Let a and b be non-zero real numbers. If $x, y \in \mathbb{R}^+$ then $\frac{a^2}{2b^2}x^2+\frac{b^2}{2a^2}y^2 > xy$.

(ii) Let x be a positive real number. If $x-\frac{2}{x}>1$ then $x>2$.

6. (a) (i) Prove that the product of an irrational number and a nonzero rational number is irrational.

(ii) Let a be an irrational number and r a nonzero rational number. Prove that if s is a real number, then either $ar+s$ or $ar-s$ is irrational.

(b) Disprove the following statement.

There exists an odd integer n such that n^2+n+1 is even.