இலங்கை திறந்த பல்கலைக்கழகம்
விஞ்ஞானமாணி/கல்விமாணி பட்டப்பாடநெறி
இறுதிப் பரீட்சை - 2024/2025
தூய கணிதம் – மட்டம் 03
PEU3301 – கணிதத்தின் அடிப்படைகள்

காலம்: இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

திகதி: 28-04-2025 **நேரம்: பி.ப. 01.30 – பி.ப. 3.30**

பொது அறிவுறுத்தல்கள்

1. வினாக்களுக்கு விடையளிக்கமுன் அனைத்து அறிவுறுத்தல்களையும் கவனமாக வாசிக்கவும்.
2. இவ் வினாப்பத்திரமானது பகுதி **A** மற்றும் பகுதி **B** என **இரண்டு** பகுதிகளைக் கொண்டுள்ளது. பகுதி **A** கட்டாயமானது மற்றும் இது **ஆறு** கட்டமைக்கப்பட்ட கட்டுரை வினாக்களைக் கொண்டுள்ளது.
3. பகுதி **B** யானது **ஐந்து** கட்டுரை வகையான வினாக்களைக் கொண்டுள்ளது அவற்றில் **மூன்று** வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்கவும். பகுதி **B** இல் ஒவ்வொரு வினாவுக்குமான புள்ளிகள் 100 ஆகும்.

பகுதி **A**

அனைத்து வினாக்களுக்கும் விடையளிக்குக.

1.

a) தொடை $A = \{n \in \mathbb{N}: n^2 + n + 23\}$ வெறுமையற்றது என நிறுவுக.

b) A, B மற்றும் C ஆகியவை தொடைகள் என்க. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ எனக் காட்டுக.

c) சார்பு $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ இன் வீச்சைக் காண்க.

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $x \in [2, \infty)$ மற்றும் $g(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$, $x \in \mathbb{R}$ என்க. $g \circ f$ ஐ காண்க.

e) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ என்க. $f([-1, 3])$ ஐ காண்க.

f) கூட்டல் கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி, $(-0) = 0$ எனக் காட்டுக.

பகுதி B

மூன்று வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடையளிக்குக.

2.

a) சுமனிலி $\frac{|2x-3|}{3x-2} \leq 4$ ஐ தீர்க்க, இங்கு $x \in \mathbb{R}$ ஆகும்.

b) $f(x) = 2x - 3$ ஆல் $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ வரையறுக்கப்படுகிறது என்க. $f^{-1}([2,9))$ ஐ காண்க.

c) $x + y$ ஒற்றை ஆகுமாறு x மற்றும் y முழு எண்கள் என்க. x இரட்டை அல்லது y இரட்டை என நிறுவுக.

3.

a) அனைத்து $x, y \in \mathbb{R}$ இற்கும் $x \leq y$ எனின் xRy மூலம் அனைத்து மெய்யெண்களினதும் தொடை $\mathbb{R}$ இன் மீது R ஒரு தொடர்பு என வரையறுக்கப்படுகிறது என்க.

i. R என்பது $\mathbb{R}$ மீதுள்ள ஒரு சமவன்மைத் தொடர்பு எனக் காட்டுக.

ii. R என்ற தொடர்பு $\mathbb{R}$ மீதான ஒரு மொத்த வரிசை தொடரா? உமது விடையை நியாயப் படுத்துக.

b) $m \in \mathbb{N}$ என்க. *கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப்* பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

i. அனைத்து $n \in \mathbb{N}$ இற்கும் $m + n \in \mathbb{N}$.

ii. அனைத்து $n \in \mathbb{N}$ இற்கும் $mn \in \mathbb{N}$.

4.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$, $x \in (0,1)$ என்க.

i. f என்பது $(0,1)$ இலிருந்து $(1,\infty)$ ஆக உள்ள ஒரு இருவழிக் கோப்பு எனக் காட்டுக.

ii. f இன் நேர்மாறு சார்பு உள்ளதா? ஆம் எனின், நேர்மாறு சார்பு $f^{-1}(x)$ ஐ காண்க.

b) α ஒரு பூச்சியமல்லா அட்சரகணிதவெண் என்க. $\frac{1}{\alpha}$ ஒரு அட்சரகணிதவெண் எனக் காட்டுக.

5.

a) ஒவ்வொரு மெய்யெண் c யும் வெறும் தொடை $\emptyset$ இன் மேல் வரைப்பு என நிறுவுக.

b) திறந்த ஆயிடை $(0,2)$ ஐ கருத்தில் கொள்க.

i. $(0,2)$ வரைப்புற்றது எனக் காட்டுக.

ii. தொடை $(0,2)$ இற்கு ஒரு இழிவு இல்லை என நிறுவுக.

iii. $\sup(0,2) = 2$ எனக் காட்டுக.

6.

a) $n \in \mathbb{N}$ இற்கு $a_n = \frac{1}{3^{2n-1}}$ என்க.

i. $n \in \mathbb{N}$ இற்கு, n ஆவது பகுதிக் கூட்டுத்தொகை $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ எனக் காட்டுக.

ii. தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஒருங்கும் மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{4}$ எனக் காட்டுக.

b) $n \in \mathbb{N}$ இற்கு $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ என்க. தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ விரியும் எனக் காட்டுக.

c) தொடரி ஒன்றின் எல்லைக்கான வரைவிலக்கணத்தைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம், $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ என நிறுவுக.

****